ORSAY
Série A
N° d'ordre :
256

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Pour obtenir le titre de Docteur-Ingénieur

par

Colette PAIN
Ingénieur E.S.E.

MODELE MATHEMATIQUE DU SYSTEME PULMONAIRE
SIMULATION DU PROCESSUS D'EXPIRATION FORCEE

Soutenue le 30 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM. BLANC-LAPIERRE - Président
PICINBONO
LAURENT
DUPERDU
BARGETON
} Examinateurs

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

Pour obtenir le titre de Docteur-Ingénieur

par

Colette PAIN

Ingénieur E.S.E.

MODELE MATHEMATIQUE DU SYSTEME PULMONAIRE
SIMULATION DU PROCESSUS D'EXPIRATION FORCEE

Soutenue le 30 Juin 1975 devant la Commission d'Examen

MM. BLANC-LAPIERRE - Président
PICINBONO
LAURENT
DUPERDU
BARGETON
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

Pages

AVANT-PROPOS

CHAPITRE 1 - OBJECTIFS DU TRAVAIL - ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE ET METHODE CHOISIE 1

1.1. - Objectifs du travail 1

1.2. - Analyse bibliographique 2

I.2.1. - historique et méthodes 2

a) notion d'IVPF. 2
b) modèles du système pulmonaire 3
c) propriétés d'élasticité des parois bronchiques 4

I.2.2. - résultats 4
1.2.3. - conclusions. 5

I.3. - Méthode choisie. 5

1.4. - Conclusion : contraintes dues à l'aspect biologique de l'objet étudié. 6

CHAPITRE 2 - ELABORATION DU MODELE 7

2.1. - Définition et description de l'objet 7

2.1.1. - Le système pulmonaire 7

a) fonction et organisation 7
b) situation 8

2.1.2. - L'objet : l'arbre bronchique - son fonctionnement la ventilation 9

a) l'arbre bronchique 9
b) la ventilation 9

2.2. - Elaboration du modèle..... 10

2.2.1. - Hypotheses concernant la structure de l'arbre bronchique 11

a) dichotomie régulière et validité 11
b) autres structures 15
c) structure choisie 17

pages

2.2.2. - Hypothèses concernant les grandeurs physiques appliquées au système 18

a) pression pleurale 18
b) pression alvéolaire 19

2.2.3. - Hypothèses concernant l'écoulement aérien 19

a) au niveau d'une bronche 19
b) au niveau global de l'arbre bronchique 22
c) hypothèses annexes 24

2.2.4. - Remarques 26

2.3. - Récapitulation : le modèle et les principales hypothèses. 27

CHAPITRE 3 - PROCESSUS EXPERIMENTAL - ACQUISITION DES DONNEES .. 29

3.1. - Processus expérimental 29

3.1.1. - Définition 29
3.1.2. - Intérêt 30

3.2. - Acquisition des données 31

3.2.1. - Pression pleurale 31
3.2.2. - Débit buccal 32
3.2.3. - Pression alvéolaire 33

3.3. - Conclusion 38

CHAPITRE 4 - METHODE DE SIMULATION - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES 39

4.1. - Méthode générale de simulation 39

4.2. - Equation d'état $f(S, PTM) = 0$ 41

4.2.1. - Position du problème 41
4.2.2. - Difficultés dues à l'indétermination de cette relation 42
4.2.3. - Conclusion 45

4.3. - Résolution du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires 46

4.3.1. - Choix d'une méthode numérique de résolution 46
4.3.2. - Résolution numérique du système d'équations régissant l'écoulement 48

a) stabilité 49
b) procédure et schéma de résolution 50

pages

CHAPITRE 5 - SIMULATION ET RESULTATS 61

5.1. - Mise en oeuvre 61

5.1.1. - Schéma général de simulation 61
5.1.2. - Equations réduites. Pas de calcul. 61

a) équations réduites 61
b) pas de calcul 63

5.1.3. - Conditions initiales. 65

5.2. - Influence du comportement des parois bronchiques 66

5.2.1. - Utilisation des relations provenant de la littérature 67
5.2.2. - Autres formes de l'équation d'état. 67

a) relation linéaire section-pression transmurale 67
b) équation du premier ordre 70

5.3. - Influence de divers paramètres 74

5.3.1. - Facteurs concernant le tuyau 75

a) dimensions géométriques 75
b) élasticité des parois 78

5.3.2. - Facteurs concernant l'écoulement 79

a) hypothèse $\frac{\partial Q_n}{\partial x_n} \neq 0$ 79
b) terme de frottement 80

5.3.3. - Conditions aux limites. 81

5.4. - Remarques 82

CHAPITRE 6 - DISCUSSION DES RESULTATS 85

6.1. - Interprétation de l'influence de l'équation d'état bronchique 86

6.2. - Interprétation de l'influence de certains paramètres 89

6.2.1. - $\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{\text{initial}}$ et $\ell(i)_{\text{initial}}$ 89

6.2.2. - seuil de pression transmurale 90
6.2.3. - frottements 90

6.3. - Validité du modèle et conclusions 91

6.3.1. - Validité du modèle et contraintes dues au manque d'informations 91

pages

6.3.2. - Conditions nécessaires à une exploitation quantitative du modèle 92

a) investigation directe du système pulmonaire 92
b) nouvelles méthodes de mesures 92

CHAPITRE VII - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 95

ANNEXE 97

RESUME 101

BIBLIOGRAPHIE 109

AVANT - PROPOS

Ce travail a été réalisé dans les Laboratoires du Service des Mesures de l'ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE en liaison avec le Service des Explorations Fonctionnelles du Centre Hospitalier-Universitaire Henri MONDOR.

Nous exprimons toute notre gratitude à Monsieur BLANC-LAPIERRE, Professeur à l'Université de Paris XI, Directeur de l'Ecole Supérieure d'Electricité qui a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions et a bien voulu accepter la direction de cette thèse ainsi que la présidence du jury.

Monsieur DUPERDU, Chef du Service des Mesures de l'Ecole Supérieure d'Electricité, nous a accueilli dans son Service. Nous le remercions de la confiance qu'il nous a témoignée tout au long de cette étude.

Nous adressons de vifs remerciements à Monsieur PICINBONO, Professeur à l'Université de Paris XI, qui a bien voulu porter un jugement sur ce travail.

Monsieur LAURENT, Chef du Service des Explorations Fonctionnelles de l'Hôpital Henri MONDOR, est à l'origine de ce travail. Qu'il en soit tout particulièrement remercié, lui et son équipe, dont la collaboration a permis la réalisation des expérimentations indispensables.

Monsieur DEMOMENT nous a témoigné une aide permanente et déterminante dans l'orientation et le développement de cette étude. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre réelle gratitude et de notre profonde sympathie.

Nous voulons exprimer notre reconnaissance à Monsieur VIAULT, Chef du Centre d'Automatique de l'Ecole Supérieure d'Electricité, qui a favorisé la mise en oeuvre de ce travail en nous donnant accès à ses Laboratoires.

Monsieur BARGETON a bien voulu participer au jury, et nous l'en remercions.

Chapitre 1

OBJECTIFS DU TRAVAIL

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE ET METHODE CHOISIE

La mise en équations du fonctionnement du système pulmonaire ne constitue pas à proprement parler une démarche nouvelle. Cependant, la revue des travaux effectués dans ce domaine depuis une quinzaine d'années appelle diverses remarques :

- ce sont surtout les phénomènes d'échanges gazeux qui ont été étudiés alors que peu de travaux ont été consacrés à la mécanique de l'écoulement bronchique. Ce dernier aspect apparaît pourtant fondamental pour l'étude de la pathologie respiratoire.

- ces travaux comportent assez peu de confrontations quantitatives précises avec les résultats d'expérimentations cliniques ou animales.

- enfin, l'utilisation d'hypothèses restrictives sur la linéarité du système ou sur le comportement dynamique des parois bronchiques limite d'emblée la portée des modèles ainsi établis.

C'est pourquoi il nous a paru intéressant d'entreprendre une étude fine du fonctionnement mécanique de l'arbre bronchique, à partir de données expérimentales mesurées in vivo et à l'aide des outils puissants que fournissent l'automatique et l'analyse numérique.

1.1. - OBJECTIFS DU TRAVAIL -

Le système pulmonaire assure les échanges gazeux entre sang et air atmosphérique.

Cette fonction est remplie de deux façons complémentaires par

. diffusion gazeuse au travers du tissu alvéolaire ;

. écoulement aérien le long des voies bronchiques.

Le présent travail s'attache exclusivement à l'étude du second phénomène, et l'objectif poursuivi est, outre une analyse et une compréhension plus grandes du fonctionnement mécanique du système pulmonaire, l'établissement d'un diagnostic précoce de maladies pulmonaires de plus en plus fréquentes : les maladies "obstructives" telles que bronchite chronique, asthme, c'est-à-dire les affections entravant l'écoulement aérien.

Enfin, inversement, si l'utilisation de modèles s'est avérée fructueuse dans le domaine biologique, il est particulièrement intéressant d'appliquer les méthodes récemment développées en automatique et en analyse numérique à un système biologique complexe, non linéaire, multiparamétré, et peu connu.

1.2. - ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE -

Cette analyse est volontairement limitée aux publications se rapportant à l'étude du fonctionnement mécanique du système pulmonaire. On y trouvera successivement une revue des travaux les plus marquants, puis une synthèse de leurs résultats justifiant les orientations prises dans ce travail et qui apparaissent en dernier.

1.2.1. - Historique et méthodes -

a) Notion d'I-V-P-F.

Les travaux fondamentaux dans le domaine de la mécanique pulmonaire remontent à 1958 et sont ceux de D.L. Fry (références [41], [42], [48]) et R.E. Hyatt (références [48], [49] -

Fry et Hyatt ont déduit d'expérimentations effectuées sur des sujets humains que le comportement mécanique du système pulmonaire pourrait être presque uniquement et complètement décrit par une relation entre le débit respiratoire, le volume pulmonaire, et la pression exercée sur la plèvre (pression repérée par rapport à la pression atmosphérique). La recherche de cette relation fut effectuée sous forme expérimentale, en traçant un réseau de courbes "isovolume - pression - débit" (I.V.P.F., IsoVolume - Pressure - Flow). Les caractéristiques iso-volume (courbes P.F., Pressure - Flow) de ce réseau possèdent un point de débit maximal.

En 1958, Fry (référence [41]) proposa d'étudier sous un aspect théorique les courbes P.F. ainsi que la relation entre le débit maximal des courbes P.F. et le degré d'inflation pulmonaire, c'est-à-dire les courbes M.E.F.V., "Maximum Expiratory Flow-Volume". Il s'intéressa à l'écoulement aérien dans une bronche dans le but d'appliquer par la suite certains des résultats obtenus aux poumons pris dans leur ensemble. Il écrivit ainsi les équations très générales traduisant le mouvement d'un fluide dans un tube (système de Navier - Stokes) et se plaça dans le cas particulier de manoeuvres respiratoires mettant en jeu des phénomènes à variations lentes. Dans de telles conditions, la loi de variation du diamètre bronchique avec la pression transmurale - différence entre les pressions régnant à l'intérieur et à l'extérieur d'une bronche - est empiriquement connue - Les dérivées partielles par rapport au temps étant considérées comme négligeables, Fry put ainsi intégrer le système simplifié de Navier-Stokes pour aboutir à une expression mathématique de la relation débit maximal - degré d'inflation concernant une bronche.

En 1960, Fry et Hyatt se livrèrent à une étude de divers modèles mécaniques du système pulmonaire. Ces modèles étaient constitués d'un tube parcouru par un fluide dont l'écoulement était supposé stationnaire. La complexité de ces modèles fut progressivement accrue - tube rigide, puis tube élastique soumis à une pression externe uniforme, ou variable suivant l'axe du tube - afin d'obtenir un réseau I.V.P.F. qualitativement comparable au réseau réel du système pulmonaire.

L'étude des plans iso - débit leur permit de définir la "compliance" pulmonaire comme étant le rapport $\frac{\Delta V}{\Delta P}$ d'une variation de volume ΔV due à une variation de pression ΔP, pour un débit donné. De même, la

projection de la surface I.V.P.F. sur les plans iso-volume permet d'introduire la notion de "résistance" pulmonaire $\frac{\Delta P}{\Delta \dot{V}}$, ΔP étant la chute de pression due à un débit $\Delta \dot{V}$.

En réalité, de multiples compliances et résistances pulmonaires sont ainsi définies puisque ces coefficients varient avec le débit considéré, le degré d'inflation pulmonaire ou l'effort produit par le sujet.

Malgré la dispersion des valeurs des compliances et résistances pulmonaires, il sembla cependant que les tracés de réseaux I.V.P.F. permettraient de distinguer les sujets sains des sujets malades. En particulier, les courbes M.E.F.V. s'avérèrent reproductibles pour un même sujet et liées à une certaine forme de pathologie respiratoire.

L'hypothèse d'existence d'une relation unique entre débit, pression et volume a été par la suite le fondement de la plupart des travaux relatifs à la mécanique ventilatoire. De nombreuses études ont porté sur :

- la mesure de compliances et résistances totales ou partielles : ainsi Hyatt [49] mesura la résistance des voies aériennes extra-thoraciques

- les courbes M.E.F.V. (référence [44])

- les courbes P.V. (Bachofen, référence [36], étudia par exemple l'aire de l'hystérésis de la courbe pression-volume),

ainsi que sur la dispersion des résultats obtenus suivant l'âge, la taille ou la pathologie présentés par le sujet considéré.

Les travaux de Mead- Turner- Macklem - Little (1967 , référence [55]) constituent une approche plus originale de la mécanique pulmonaire : tentant de relier le débit maximal d'une courbe P.F. à la pression d'élasticité alvéolaire, ils introduisent la notion de "point d'égales pressions" (P.E.P), point où les pressions s'exerçant de part et d'autre des parois bronchiques sont égales en module. L'aspect original de leur étude consiste à distinguer la partie de l'arbre bronchique située en amont du P.E.P., dont la pression d'entrée, motrice de l'écoulement, est la pression alvéolaire, de la partie située en aval du P.E.P., dont la pression d'entrée est la pression pleurale. La chute de pression entre les alvéoles et le P.E.P. étant justement la pression d'élasticité alvéolaire, Mead étudia la résistance à l'écoulement des voies aériennes situées en amont du P.E.P. et montra qu'elle était liée à l'élasticité alvéolaire.

b) Modèles du système pulmonaire

Schroeter et Sudlow (1969, référence [58]) se livrèrent à l'étude, sur modèles mécaniques, du profil des vitesses de l'écoulement stationnaire d'un fluide le long d'un système branché formé d'un tube suivi de deux bifurcations.

Les travaux de Pedley- Schroeter- Sudlow (références [58] , [59] , 1970) ont consisté à évaluer l'écart à la loi de Poiseuille présenté par un écoulement de fluide dans un système multibranché. Ils donnèrent une

expression du rapport entre la perte d'énergie réelle (par unité de volume) existant pour un tel écoulement et la perte d'énergie qui existerait si l'écoulement satisfaisait la loi de Poiseuille (c'est-à-dire était laminaire). En appliquant cette théorie à un réseau de tubes dont les dimensions géométriques approchaient celles de l'arbre bronchique, ils déduisirent une expression de la chute totale de pression ΔP due aux frottements entre alvéoles et bouche :

$$\Delta P = K \dot{V}^{3/2}$$

pour un débit buccal $\dot{V}$

Le premier modèle, empirique, du système pulmonaire, fut proposé par Rohrer (1915). Il consista à représenter très globalement la chute totale de pression entre alvéoles et milieu extérieur, sous la forme :

$$\Delta P = K_1 \dot{V} + K_2 \dot{V}^2 \qquad K_1, K_2 : \text{constantes}$$

le premier terme traduisant le caractère laminaire de l'écoulement, le second tenant compte des turbulences produites par les jonctions.

Par la suite, des relations linéaires du premier ou second ordre ont été introduites :

$$\Delta P = \frac{1}{C} V + R \dot{V}$$

ou

$$\Delta P = \frac{1}{C} V + R \dot{V} + I \ddot{V}$$

Enfin, les modèles les plus récents (J.F. Golden, 1973, référence [10], A.C. Jackson, 1973, référence [13]) concernent des manoeuvres respiratoires lentes – respiration normale ou par halètement - au cours desquelles il est possible de supposer, par exemple, le volume pulmonaire constant.

c) Propriétés d'élasticité des parois bronchiques

Martin et Proctor (1958, référence [54]) se livrèrent à des mesures des dimensions géométriques de segments excisés de bronches et trachées de chiens suivant la différence des pressions, appliquées de façon statique, régnant de part et d'autre des parois.

Leurs travaux furent suivis de ceux de Olsen (références [56] , [57]) et Hyatt-Flath [47] . Néanmoins, à l'heure actuelle, les courbes expérimentales de Proctor (voir chapitre IV § 4.2) représentent pratiquement l'unique information disponible concernant l'élasticité des parois bronchiques.

1.2.2. - Résultats -

Fry, le premier, a proposé une théorie générale de l'écoulement aérien le long d'une bronche. Toutefois, la complexité du système pulmonaire, associée à un manque important d'information concernant les propriétés mécaniques de ce système l'a logiquement orienté vers le choix d'une hypothèse simplificatrice, consistant à n'étudier exclusivement que les phénomènes à variation

lente. La notion d'IVPF est donc une notion essentiellement statique. Il est par conséquent logique que les résultats des études d'IVPF aient une portée relativement restreinte : les résistances et compliances pulmonaires ne sont pas réellement significatives de la pathologie respiratoire et ne permettent pas un diagnostic fin.

Les modèles du système mécanique pulmonaire élaborés jusqu'à ce jour possèdent également un domaine de validité restreint à des conditions quasi-statiques de variation des grandeurs physiques :

- les modèles empiriques du type de celui de Rohrer ne permettent pas d'expliquer qualitativement le phénomène d'existence d'un débit limite dû à une compression des voies aériennes.

- le modèle de Pedley est fondé sur l'hypothèse d'un écoulement stationnaire ; le coefficient K dépend en réalité du volume pulmonaire.

- les modèles caractérisés par des équations différentielles du premier ou second ordre possèdent des coefficients C , R , I qui varient également avec le degré d'inflation pulmonaire, et ne sont pas significativement liés à la pathologie respiratoire.

Ces modèles ont permis un approfondissement qualitatif de la connaissance du fonctionnement global du système pulmonaire ; cependant, s'ils se révèlent satisfaisants dans les conditions de ventilation spontanée ou de manoeuvre de halètement, ils font par contre apparaître, dans le cas de processus expérimentaux au cours desquels les variations du volume pulmonaire sont importantes, des non-linéarités majeures.

1.2.3. - Conclusions -

La limitation des domaines de validité et d'exploitation des modèles proposés jusqu'à présent est dûe en grande partie à l'hypothèse restrictive d'étude de phénomènes à variations lentes.

De plus, les modèles de représentation pure, n'introduisant qu'une liaison très globale entre la pression pleurale et le débit buccal, ne permettent pas, eux non plus, de décrire assez finement le système pulmonaire. Une progression de la connaissance du fonctionnement mécanique de ce système nécessite une approche suffisamment fine des phénomènes mis en jeu ; il s'avère ainsi indispensable de traduire les lois de la physique régissant un écoulement non nécessairement stationnaire ou un mouvement de paroi, en chaque point de l'arbre bronchique.

Enfin, il semble que seuls soient réellement significatifs de la pathologie respiratoire des résultats d'expériences au cours desquelles les débits et pressions varient dans d'importantes proportions et très rapidement.

1.3. - METHODE CHOISIE -

Après cette analyse de la littérature, l'étude du système pulmonaire semble pouvoir être abordée soit par tentative de modélisation (mécanique, électrique, mathématique), soit par exploration directe du système.

L'approche choisie est une modélisation mathématique.

En effet, la complexité du système associée à un manque important d'informations le concernant, rend pratiquement irréalisables des modélisations mécaniques (système de tubes élastiques multibranchés) ou électriques (réseau résistances - capacité de valeurs réparties).

La caractérisation du modèle est une étape fondamentale : elle découle en grande partie de l'étude bibliographique qui indique la restriction que certaines hypothèses apportent au domaine de validité du modèle, l'objectif poursuivi étant d'inclure dans ce domaine un processus sensibilisant la pathologie respiratoire : le processus d'expiration forcée, dont la description est entreprise au chapitre III.

Un tel travail de modélisation, suivi d'une identification paramétrique devant aboutir à un diagnostic automatique de maladies respiratoires, exige une précision sur les grandeurs physiques mesurées beaucoup plus sévère que dans le cas d'une exploitation directe des résultats expérimentaux. Dans ce dernier cas, en effet, il existe souvent des interférences avec des résultats d'autres examens effectués sur le même patient, qui orientent le diagnostic. Conjointement à cette modélisation, une attention particulière sera donc portée au développement de méthodes d'investigation du système pulmonaire, soit en en créant de nouvelles, soit en améliorant la précision des méthodes actuellement utilisées (voir chapitre VI § 6.3.).

1.4. - CONCLUSION -

En conclusion, la mise au point d'un modèle mathématique dont la structure fait apparaitre des paramètres significativement liés à la pathologie respiratoire semble être un moyen efficace d'étudier le système pulmonaire.

Cette démarche est nouvelle et originale. Cependant, il est important de noter que l'aspect biologique de l'objet étudié impose des contraintes qui distinguent cette étude de celle, par exemple, d'un système industriel : il ne sera en effet jamais question ici d'acquérir directement une réponse impulsionnelle ou d'imposer une entrée en échelon ou sensibilisant de façon optimale les paramètres à identifier ; nous serons contraints d'adopter :

- le seul processus expérimental réalisable
- les hypothèses résultant d'un manque important d'informations sur la structure de l'objet
- des mesures dont la validité est critiquable.

C'est ce qui fait à la fois la difficulté et l'intérêt d'une telle étude.

Chapitre 2

ELABORATION DU MODELE

L'élaboration d'un modèle est un processus bouclé ; il s'agit ici d'exposer l'étape qualitative de formulation des hypothèses concernant la nature du système étudié. L'observation du comportement du modèle permettra ensuite de confirmer ou d'infirmer ces suppositions. C'est au stade de la simulation (chapitre V) que cette observation sera faite, et conduira à d'éventuelles modifications des hypothèses initiales.

2.1. - DEFINITION ET DESCRIPTION DE L'OBJET -

La description qui va suivre est volontairement schématique et peut donc paraître incomplète et grossière au physiologiste. Elle correspond à l'optique du physicien qui cherche à rattacher les phénomènes qu'il observe à des lois fondamentales de la physique.

2.1.1. - Le système pulmonaire -

a) Fonction et organisation.

Le système pulmonaire est l'organe chargé des échanges gazeux entre sang et air.

Ces échanges s'effectuent par diffusion au travers d'une surface tissulaire spongieuse de l'ordre de 200 m^2, formée de plusieurs centaines de millions "d'unités d'échange" ou "alvéoles". (figure 2.1.).

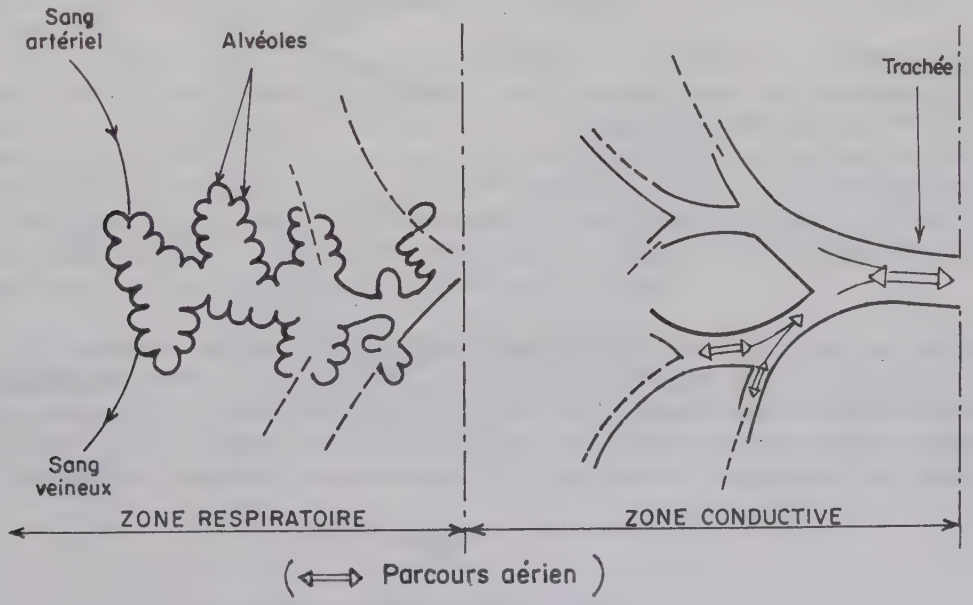


Figure 2.1

Le système pulmonaire

De même que le système cardiovasculaire assure, grâce au réseau de capillaires artériels et veineux, le renouvellement du sang, de même le système pulmonaire assure l'approvisionnement en air de chaque alvéole.

Le réseau imbriqué et complexe de voies assurant la distribution aérienne est l'arbre bronchique, ou "zone conductive". Le fonctionnement de ce réseau (c'est-à-dire l'écoulement aérien) est sans doute d'autant plus complexe que, contrairement au cas du système cardiovasculaire, ce sont les mêmes voies qui assurent l'arrivée et l'évacuation de l'air respectivement riche et pauvre en oxygène.

En réalité, la distinction entre alvéoles - lieu de diffusion gazeuse - et arbre bronchique - lieu d'écoulement gazeux - n'est pas nette, ce qui conduit à définir une "zone transitoire" où alvéoles et bronches sont intimement imbriqués.

b) Situation

Les poumons sont entourés d'une enveloppe protectrice : la plèvre, elle-même formée de deux feuillets dont l'un tapisse la surface extérieure des poumons, et l'autre la cage thoracique. Cette membrane joue un rôle fondamental au cours de la respiration puisqu'elle rend solidaires les poumons des mouvements de la cage thoracique.

Enfin, les muscles respiratoires, dont le principal est le diaphragme, sont responsables des mouvements de la cage thoracique. (figure 2.2.).

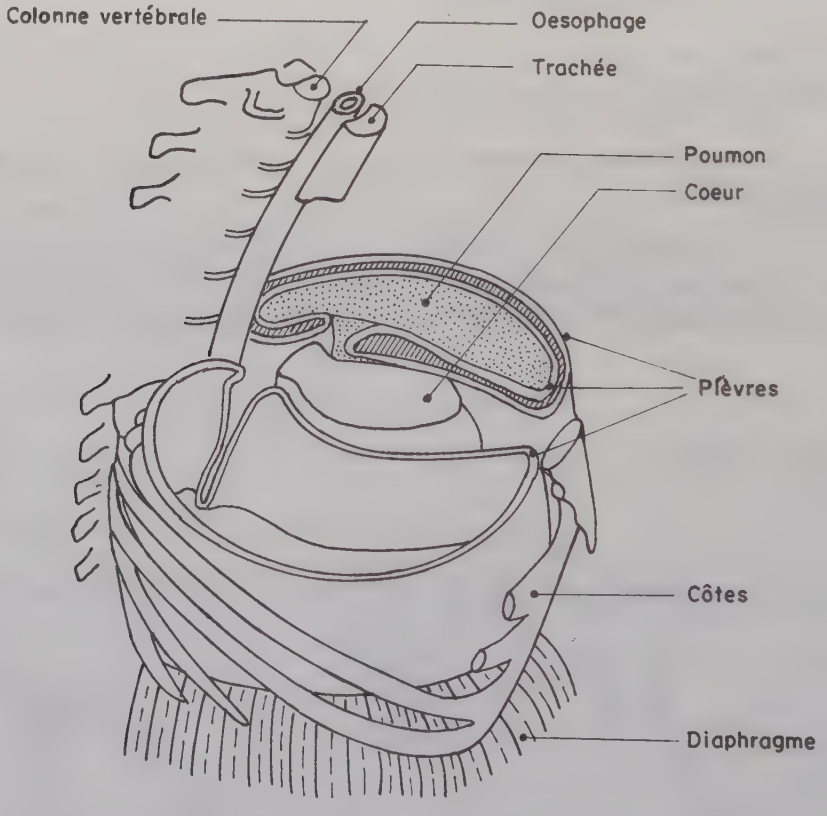


Figure 2.2

Situation du système pulmonaire

Deux organes, situés à proximité immédiate des poumons, permettront ou perturberont certaines des mesures effectuées sur le système.

- l'oesophage : voie digestive située entre la trachée et la colonne vertébrale, où sera implanté un capteur de pression (voir chapitre III)
- le coeur : inserré entre les deux poumons, dont les battements pourront perturber la mesure fournie par le capteur oesophagien.

2.1.2. - L'arbre bronchique et la ventilation -

a) L'objet : l'arbre bronchique.

Comme il a déjà été précisé au chapitre I, nous nous intéressons exclusivement au phénomène d'écoulement gazeux ; l'objet dont nous tentons d'expliquer le fonctionnement est donc l'arbre bronchique. Il est difficile d'entreprendre sa description. En effet, le nombre considérablement élevé de bronches, la diversité de leurs dimensions et modes de raccordement, font qu'à l'heure actuelle très peu d'informations précises portant sur la morphométrie de l'arbre bronchique sont disponibles. Autrement dit, faute d'une connaissance réelle de l'objet étudié, une description de cet objet résultant déjà d'une modélisation devra être adoptée. Cette description sera exposée au paragraphe 2.2.1. puisqu'elle résulte déjà elle-même d'hypothèses.

b) La ventilation.

L'inspiration est dûe à une contraction des muscles respiratoires provoquant une augmentation du volume de la cage thoracique, immédiatement répercutée, grâce à la plèvre, en une dilatation pulmonaire : l'air atmosphérique pénètre alors dans les poumons.

Pendant l'expiration, les muscles respiratoires cessent leur action : la cage thoracique revient à sa position initiale en provoquant un écrasement des poumons donc un rejet d'air vers le milieu extérieur.

Le volume d'air échangé avec l'extérieur pendant la respiration normale est d'environ 0,5 l (pour des poumons dont la capacité totale serait de 5 l. environ) (figure 2.3). Ce volume peut paraître faible, mais il faut noter que d'une part le volume d'inflation moyen de tels poumons est d'environ 3 l, et que, d'autre part, le phénomène de diffusion exigeant une immobilité temporaire des gaz alvéolaires, est sans doute incompatible avec un renouvellement, au cours de chaque cycle respiratoire, de la totalité de l'air pulmonaire.

Il existe des mouvements respiratoires dits "forcés" au cours desquels les efforts musculaires sont volontairement plus grands qu'au cours de la respiration normale : l'expiration forcée sera décrite plus loin (Chapitre III). C'est en effet, parmi les expériences réalisables, celle qui permettra au mieux de tester et d'exploiter le modèle proposé.

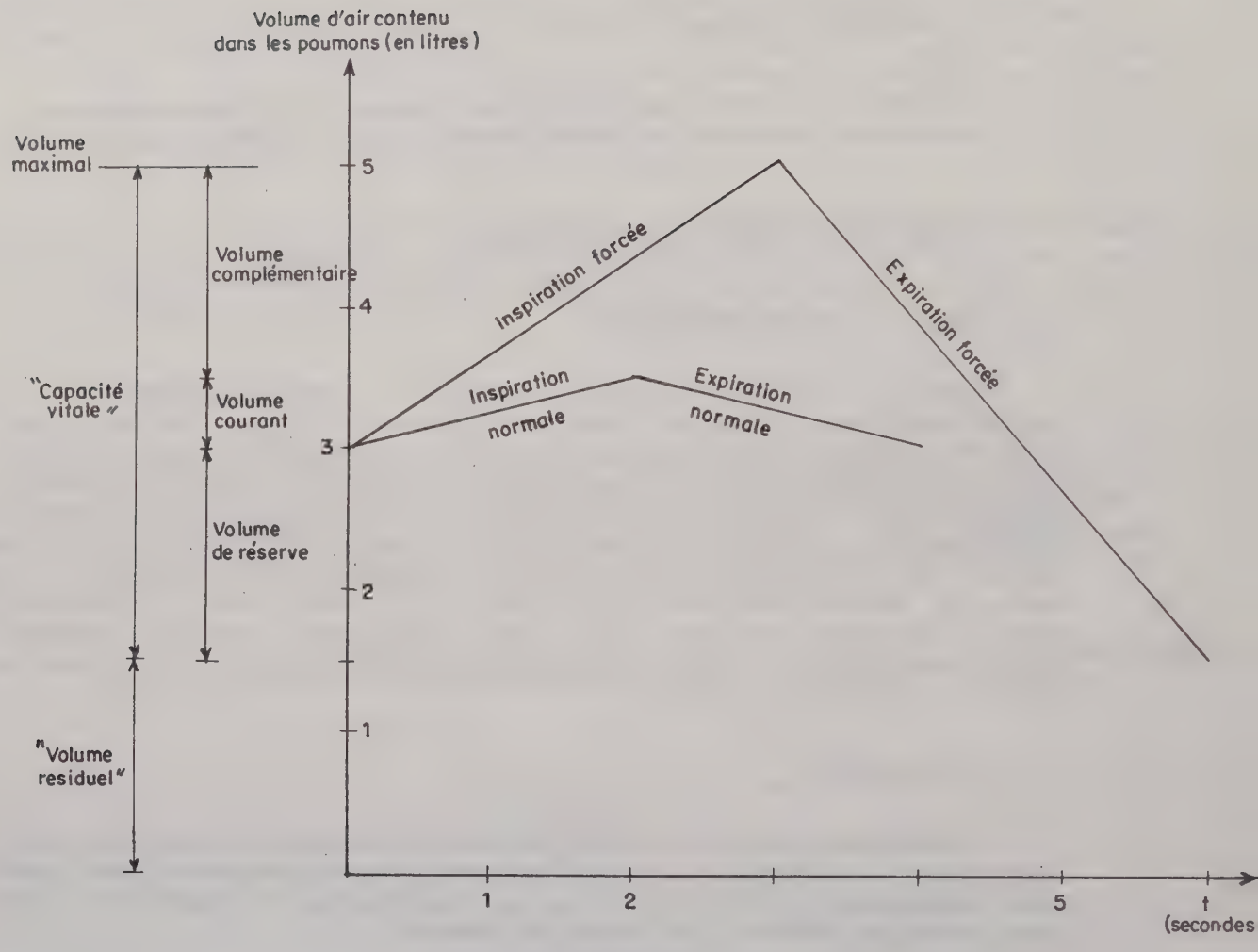


Figure 2.3

Ventilations normales et forcées

2.2. - ELABORATION DU MODELE -

L'étude bibliographique a montré l'insuffisance des modèles de représentation pure vis-à-vis de la compréhension du fonctionnement du système pulmonaire. C'est pourquoi cette étape de caractérisation, partiellement imposée par une connaissance assez médiocre de la morphologie du système, a consisté à mettre en équations les phénomènes relevant du domaine de la physique classique - en l'occurence l'écoulement gazeux -

2.2.1. - Hypothèses concernant la structure de l'arbre bronchique -

L'analyse quantitative de l'architecture du système pulmonaire est un travail complexe. En effet, les éléments qui constituent ce système sont nombreux et divers : plusieurs centaines de millions d'alvéoles, dont le diamètre moyen est d'environ 100 μ.

L'étude bibliographique à ce sujet est déconcertante. Elle révèle une importante dispersion des résultats : suivant les auteurs, le nombre des alvéoles varie de 70 à 5.000 millions, leur diamètre moyen de 50 à 600 μ , la surface alvéolaire de 30 à 200 m^2. Ceci est dû non seulement aux difficultés pratiques rencontrées lors d'études d'organes de taille microscopique, mais aussi à l'intervention de facteurs que l'expérimentateur n'est pas toujours en mesure de fixer de façon précise : c'est le cas, par exemple, du degré d'inflation pulmonaire dont la valeur semble modifier notablement les résultats des mesures de la surface alvéolaire formée d'une substance très extensible.

De rares études morphométriques ont été entreprises au cours des dernières années ; les travaux fondamentaux quant à la structure pulmonaire sont toujours ceux du physiologiste E.R. Weibel (référence [62]).

Ces travaux ont consisté à étudier au microscope électronique des échantillons judicieusement choisis d'éléments de la zone respiratoire (tissu alvéolaire) et de la zone conductive (arbre bronchique) de poumons humains de taille moyenne gonflés aux trois-quarts de leur capacité maximale. Un traitement statistique des résultats a ensuite permis d'établir des modèles des alvéoles et de l'arbre bronchique. Le modèle du tissu alvéolaire ainsi proposé ne concerne pas directement notre étude, à l'exception du nombre total d'alvéoles : 300 millions.

a) Structure dichotomique régulière de l'arbre bronchique - validité.

Ce modèle est proposé par E.R. Weibel [62]

De la trachée aux 300 millions d'alvéoles, les bronches se succèdent selon une loi de dichotomie régulière : chaque bronche donne naissance à deux autres dont les dimensions géométriques (longueur - diamètre d'un cylindre) sont les mêmes, et ainsi de suite. Une bronche est ainsi caractérisée par la distance qui la sépare de la trachée, ce qui permet d'introduire la notion de "génération bronchique", la $i^{ième}$ contenant 2^i bronches absolument semblables (figure 2.4).

Les générations 0 à 16 constituent la zone conductive ; les générations 16 à 23 la zone transitoire. Le nombre total de générations (24) est calculé de telle sorte que le nombre d'éléments des quatre dernières générations de la zone transitoire $\left(\sum_{k=0}^{3} 2^{23-k} \right)$ soit celui (environ 14 millions) obtenu lors d'expériences préléminaires.

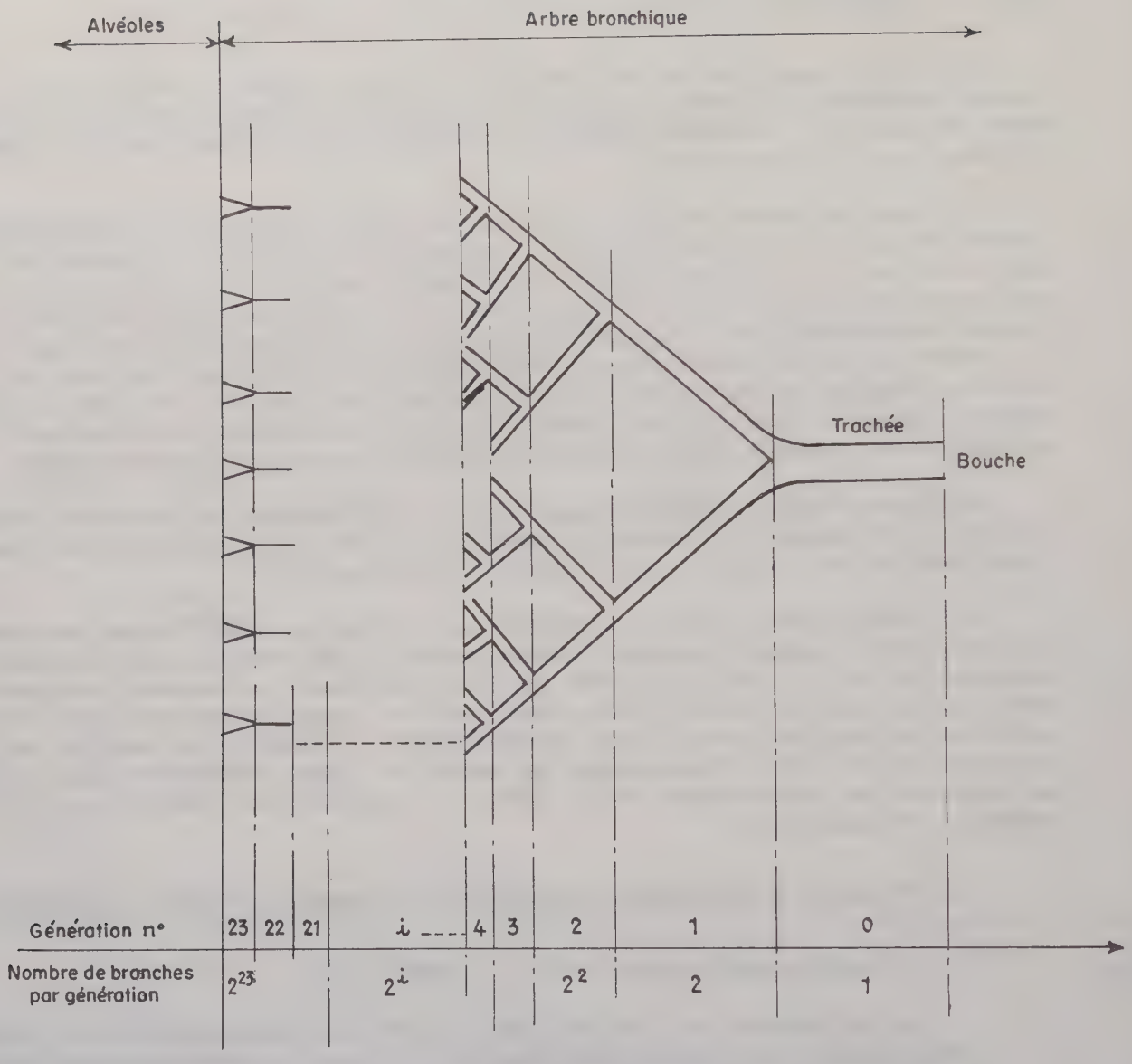


Figure 2.4

Structure dichotomique régulière de l'arbre bronchique

Le tableau de la figure 2.5. fournit les dimensions géométriques, selon une structure dichotomique, d'un poumon humain d'une capacité de 6,4 l gonflé à 75 %.

Cette représentation de l'arbre bronchique comporte des hypothèses dont il est possible d'évaluer grossièrement la validité :

- une séparation par trichotomie est observable, tout particulièrement sur les bronches des lobes supérieurs. Cependant, c'est un phénomène rare (à peine un cas pour mille dichotomies) dès la 4ème génération.

- l'hypothèse de régularité de la dichotomie est beaucoup plus

Generation z	Number Per Génération $n(z)$	Diameter $d(z)$ cm	Length $\ell(z)$ cm
0	1	1.8	12.0
1	2	1.22	4.76
2	4	0.83	1.90
3	8	0.56	0.76
4	16	0.45	1.27
5	32	0.35	1.07
6	64	0.28	0.90
7	128	0.23	0.76
8	256	0.186	0.64
9	512	0.154	0.54
10	1,024	0.130	0.46
11	2,048	0.109	0.39
12	4,096	0.095	0.33
13	8,192	0.082	0.27
14	16,384	0.074	0.23
15	32,768	0.066	0.20
16	65,536	0.060	0.165
17	131,072	0.054	0.141
18	262,144	0.050	0.117
19	524,288	0.047	0.099
20	1,048,576	0.045	0.083
21	2,097,152	0.043	0.070
22	4,194,304	0.041	0.059
23	8,388,608	0.041	0.050

Figure 2.5 (*)

(*) d'après Weibel

Fonctions des voies aériennes selon une structure dichotomique

critiquable : la figure 2.6. représente la distribution des rapports D_1 / D_2 et L_1 / L_2 de deux bronches conjuguées ($D_1 < D_2$ et $L_1 < L_2$). Si les diamètres de ces bronches sont voisins (D_1 / D_2 est compris entre 0,8 et 1.0 dans la majorité des cas) par contre, le rapport des longueurs présente une grande dispersion ($0.2 < L_1 / L_2 < 1.0$).

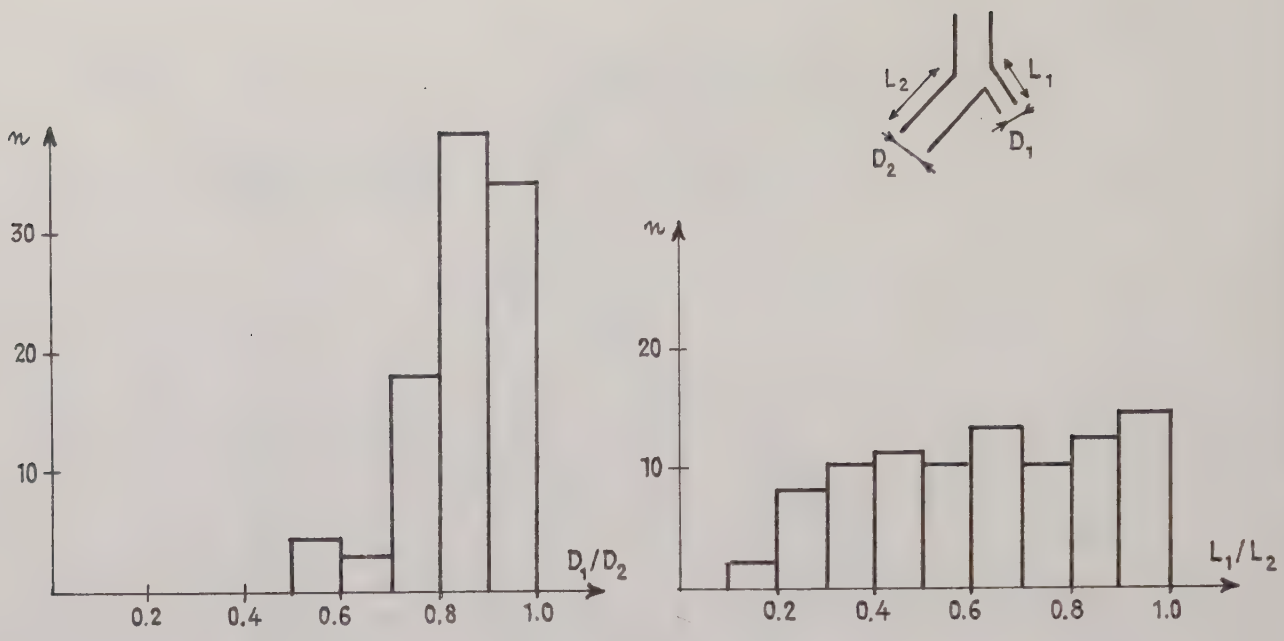


Figure 2.6 (*)

(*) d'après Weibel

Validité de l'hypothèse de régularité de la dichotomie

n : nombre de dichotomies observées

D_1, L_1, D_2, L_2 : diametres et longueurs des deux bronches conjuguées ($D_1 < D_2$; $L_1 < L_2$)

La figure 2.7. montre qu'à l'intérieur d'une même génération, les dimensions géométriques des segments aériens sont variables, ce qui confirme les résultats de la figure 2.6.

- Enfin, si les bronches les plus grosses (génération 0 à 4) ne sont pratiquement pas influencées par le degré d'inflation pulmonaire, par contre, lors d'une inflation maximale, le diamètre des bronches les plus fines pourrait être multiplié par un facteur 1,3 à 2, et leur longueur par un facteur 1.2.

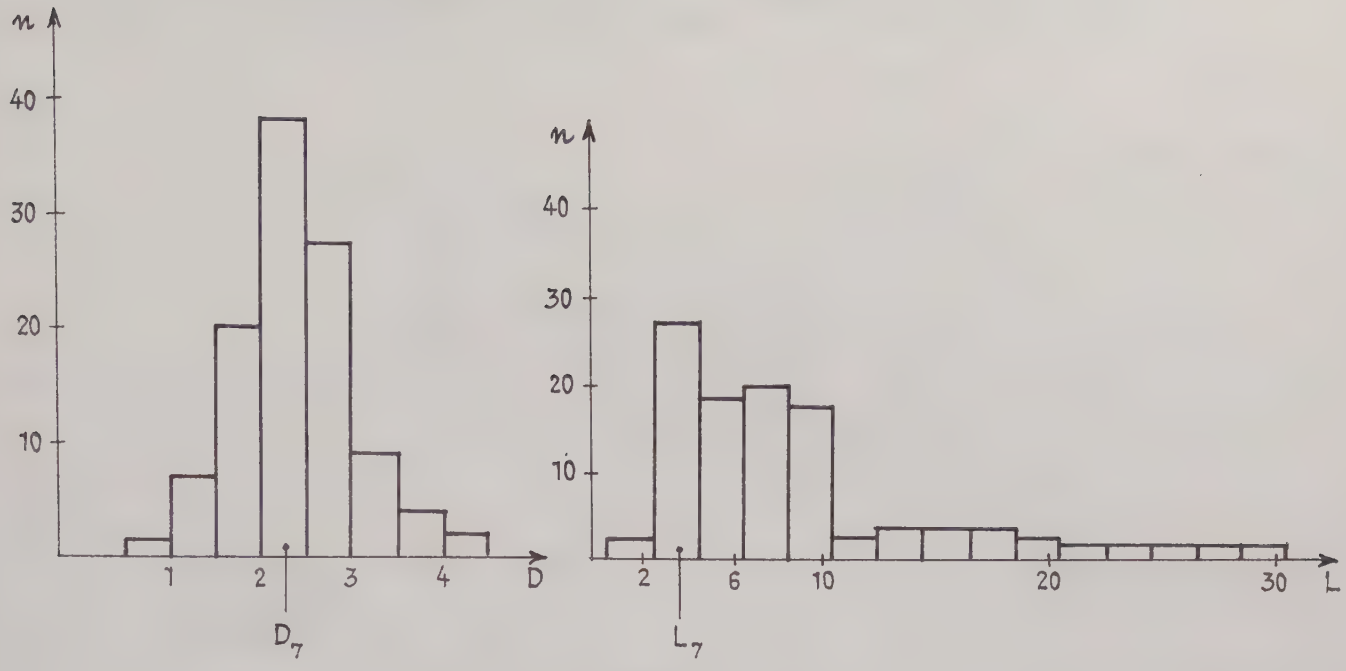


Figure 2.7 (*)

(*) d'après Weibel

Distribution des diamètres et longueurs de branches appartenant à la $7^{ème}$ génération ($N_7 = 128$)

b) Autres structures de l'arbre bronchique.

Il apparait donc clairement que l'arbre bronchique n'est pas un système symétrique. Des représentations non symétriques ont donc été tentées.

E.R. Weibel [62] propose de définir toutes les distributions $\varphi_i(z)$ des bronches de diamètre $i(mm)$ suivant la génération z (figure 2.8.).

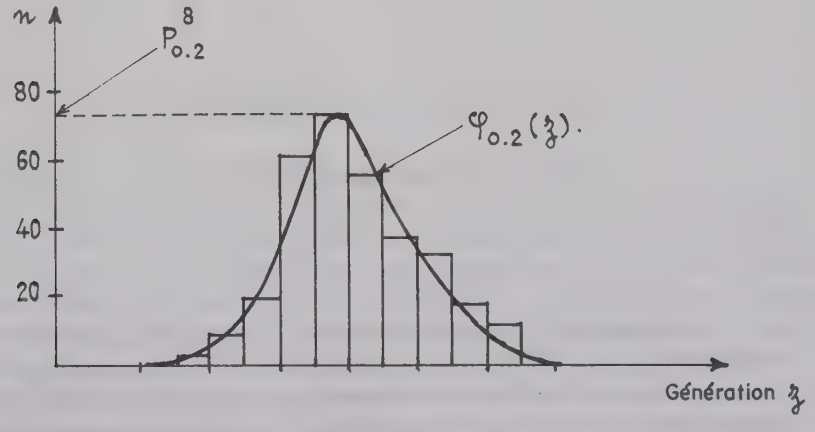


Figure 2.8 (*)

(*) d'après Weibel

Répartition des bronches de 2mm de diamètre suivant la généralisation z.

Les poumons sont alors divisés en N groupes contenant chacun n_i bronches de diamètre d_i dont μ_i^J appartiennent à la génération J (figure 2.9).

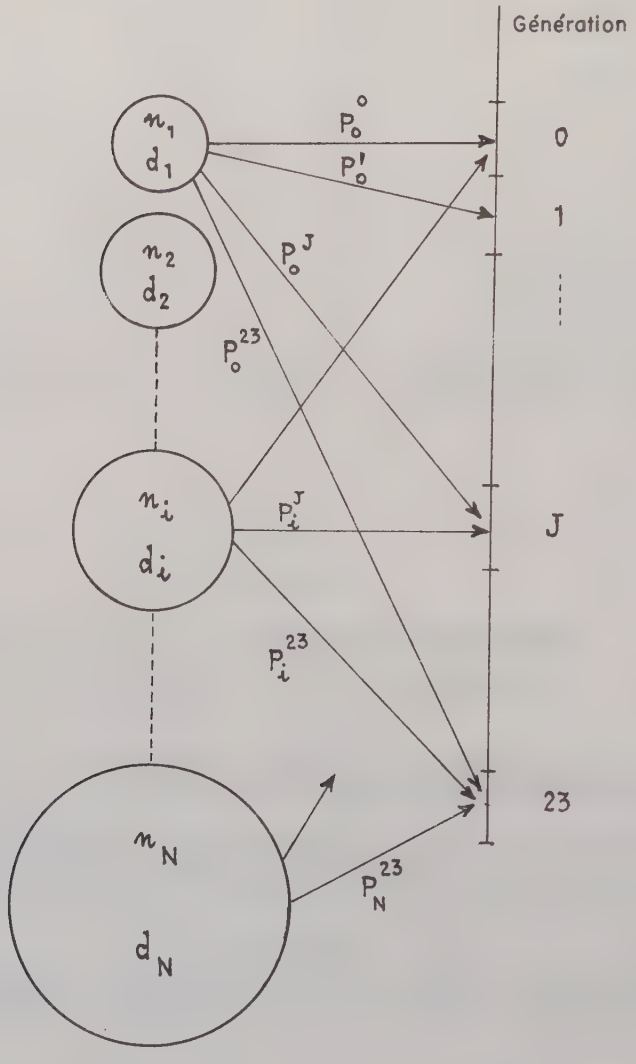


Figure 2.9

Structure non régulière de l'arbre bronchique

Récemment, K. Horsfield et G. Cumming [45] ont proposé un modèle asymétrique de l'arbre bronchique : en dénombrant les bronches des alvéoles à la bouche, et en affectant du même nombre toutes les bronches de même taille, les polychotomies et asymétries du système ne sont pas négligées. (figure 2.10). Le nombre des bronches de chaque génération est obtenu en calculant les temps de transit d'une molécule gazeuse et les sommes des gradients de pression le long de tous les trajets possibles entre les alvéoles et la bouche.

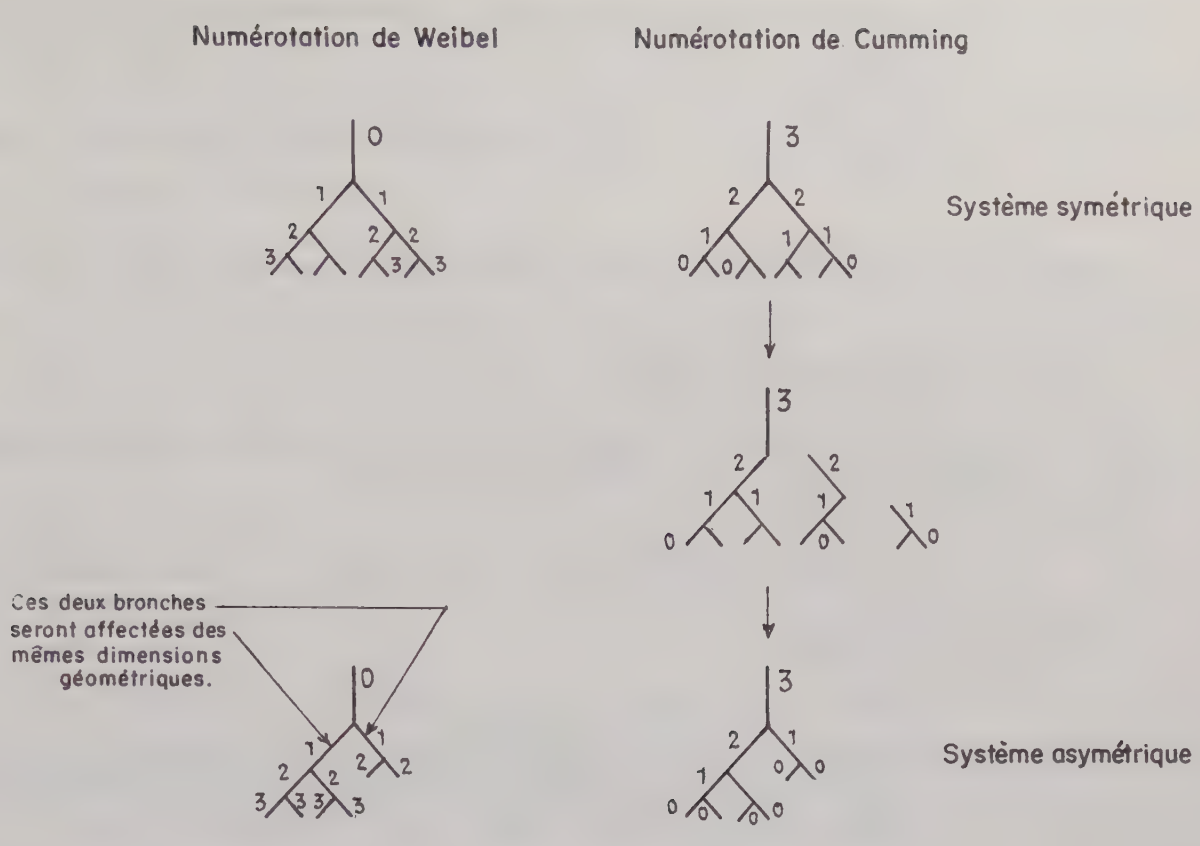


Figure 2.10

Défaillance de la représentation de Weibel dans le cas d'un système asymétrique

c) Structure choisie.

Il est difficile de comparer les structures proposées : la correspondance entre les deux représentations n'est en effet pas établie, et tel point repérable selon la numérotation de Weibel ne l'est pas suivant celle de Cumming. Cependant, les résultats concernant des grandeurs globales (par exemple le volume des 15 premières générations) sont comparables. D'autre part, la structure proposée par Cumming, si elle parait plus satisfaisante, est fondée sur des hypothèses concernant les calculs des temps de transit et somme des gradients de pressions qui peuvent restreindre sa généralité.

Il parait donc logique d'adopter la représentation la plus simple, c'est-à-dire la structure dichotomique régulière. Elle présente de plus l'avantage d'avoir été choisie par la grande majorité des auteurs ayant étudié le système pulmonaire ; en l'adoptant, nous disposerons ainsi notamment d'informations sur l'élasticité bronchique (voir chapitre IV).

Ce choix d'une structure dichotomique de l'arbre bronchique est important Il faut être conscient de la restriction qu'il risque d'apporter à la validité de notre étude. Cependant, nous verrons au stade de la simulation (chapitres V et VI) qu'un ajustement de la géométrie du modèle de l'arbre bronchique assurant une identité de comportement du modèle et

de l'objet, permettra de restreindre l'importance qu'il convient d'accorder à ce choix.

2.2.2. - Hypothèses concernant les grandeurs physiques appliquées au système -

Deux grandeurs physiques - la pression pleurale et la pression alvéolaire - dépendant a priori de trois coordonnées géométriques et du temps, sont supposées équiréparties :

a) pression pleurale (P_{pl})

C'est la pression exercée sur la plèvre par le milieu extérieur (muscles respiratoires). Elle est supposée :

- d'une part s'exercer uniformément sur la plèvre. En réalité, elle est plus élevée au niveau du diaphragme, principalement responsable de la respiration, qu'au niveau des lobes supérieurs des poumons

- d'autre part régner, et ce uniformément, à l'extérieur de chacune des 2^i bronches de la génération i (et ce quel que soit i) (figure 2.11). En réalité, si les parois des bronches périphériques sont effectivement soumises à la pression pleurale, il est moins évident que les parois des bronches internes le soient.

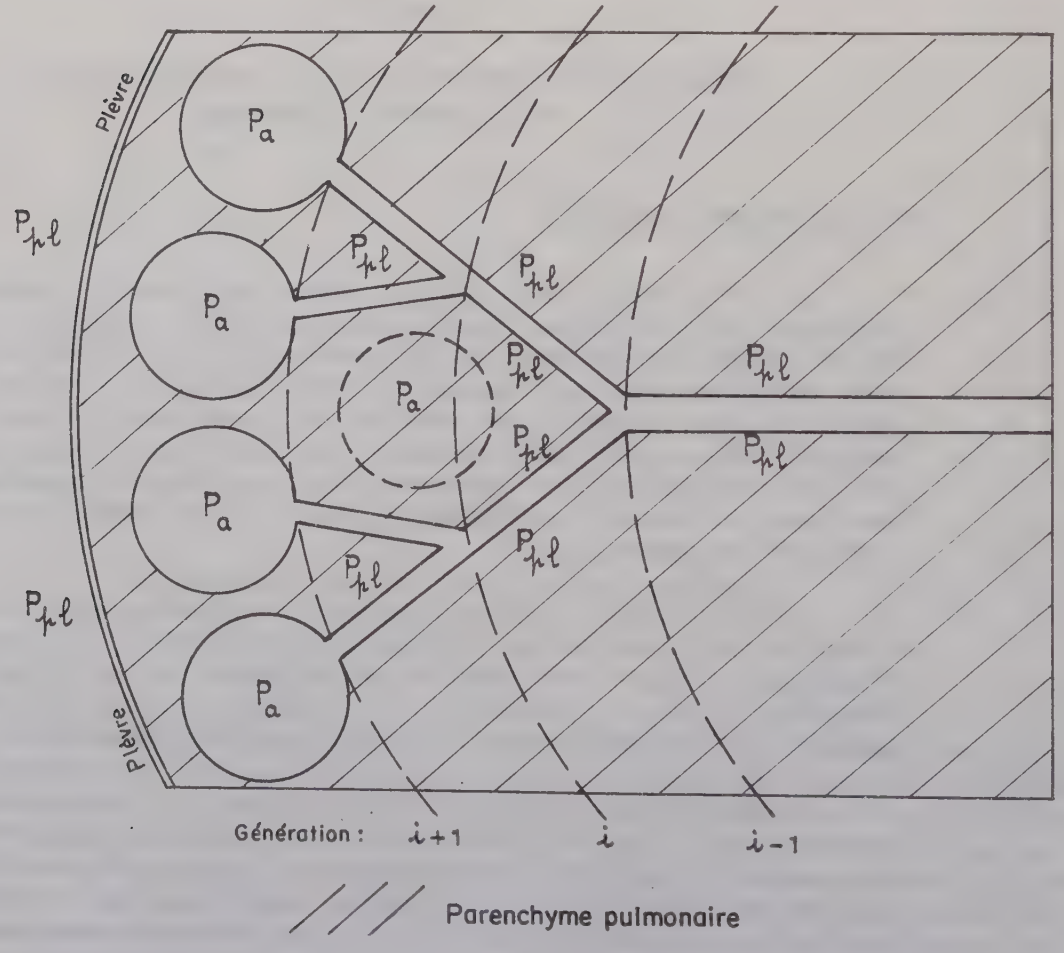


Figure 2.11

Equirepartition des pressions: pleurale (P_{pl}) et alvéolaire (P_a).

L'implantation de multiples capteurs le long de la plèvre étant traumatisante, aucune de ces deux hypothèses n'est contrôlable. Pour cette même raison, la pression pleurale ne sera mesurée que très difficilement, en un seul point situé près de la trachée (voir chapitre III).

b) pression alvéolaire (P_a)

C'est la fonction définie - a priori en 300 millions de points - comme étant la pression régnant dans un alvéole. Elle est supposée indépendante de la position spatiale de cet alvéole, c'est-à-dire identique dans tous les alvéoles. L'hypothèse d'équirépartition de P_a sur les parties inférieures et supérieures des poumons est comparable à celle qui concerne P_{pl} .Par contre, l'hypothèse d'équirépartition entre centre et périphérie pulmonaires est moins restrictive puisque la majorité des alvéoles sont situées à la périphérie. En contrepartie la mesure de la pression alvéolaire sera encore plus difficile que celle de P_{pl} (voir chapitre III) ; P_a sera évaluée par une méthode indirecte.

La portée de ces deux séries d'hypothèses n'est pas prévisible. Nous sommes cependant, faute de moyens d'investigation du système, contraints de les adopter.

Désormais, ces pressions seront donc des fonctions d'une seule variable, le temps, notées $P_a(t)$ et $P_{pl}(t)$.

2.2.3. - Hypothèses concernant l'écoulement aérien -

L'analyse de l'écoulement de l'air le long du système symétrique de tubes cylindriques multibranchés précédemment décrit a été réalisée au niveau d'une quelconque des 2^i bronches de la génération i dans un premier temps, puis au niveau global, aboutissant ainsi au modèle définitif de l'arbre bronchique.

a) Au niveau d'une bronche :

Les équations générales de mécanique concernant l'écoulement d'un fluide et traduisant la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement s'écrivent, dans un repère absolu, en formulation eulérienne (c'est-à-dire en considérant les trois coordonnées spatiales et le temps comme des variables indépendantes) :

$$(1) \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{(conservation de la masse)}$$

$$(2) \qquad \rho \frac{Du}{Dt} + \operatorname{grad} P = f_e + \mu \Delta u + \left(\mu_v + \frac{1}{3}\mu\right) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u)$$

(équation de Navier - Stokes)

où u représente la vitesse du fluide dans le repère considéré.

$\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad}.$$

t est le temps

ρ la masse volumique du fluide

f_e la densité volumique des forces extérieures

P la pression du fluide

$\left.\begin{matrix}\mu \\ \mu_v\end{matrix}\right\}$ viscosités du fluide ($\mu_v \neq 0$).

Les variations de température du fluide sont supposées suffisamment faibles pour que les grandeurs ρ et μ soient constantes. ,

L'équation (2) exprime l'équilibre des forces d'inertie $\left(\rho \frac{Du}{Dt}\right)$, des forces extérieures (f_e), des contraintes de pressions (- grad P) et des contraintes visqueuses (termes en μ et μ_v).

Le système (1)(2) est difficilement exploitable ; un certain nombre d'hypothèses simplificatives peuvent être formulées :

- l'air peut être considéré comme un fluide homogène, soit :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt}$$

- la pesanteur a une influence négligeable sur l'expiration : f_e sera pris nul par la suite.

- Il existe un critère d'estimation de la compressibilité d'un fluide dont le mouvement est gouverné par (1)(2). Il consiste à comparer la vitesse d'écoulement du fluide à la vitesse du son dans ce même milieu ; on démontre en effet que, pratiquement, pour :

$$\text{Mach} = \frac{u}{c} = \frac{\text{vitesse du fluide}}{\text{vitesse locale du son}} < 0,3$$

le fluide peut être considéré comme incompressible. (Cette condition découle d'une comparaison des ordres de grandeurs des deux termes : $\frac{D\rho}{Dt}$ et $\rho \operatorname{div} u$ de l'équation (1) et c'est la définition même de c par : $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$ (s: entropie), qui introduit c dans ce critère d'incompressibilité).

Un calcul rapide permet de constater a priori qu au cours du processus expérimental utilisé (défini au chapitre III), cette condition est vérifiée :

Le débit buccal (génération 0) maximal au cours d'une telle expérience est : $Q_{max} \# 10\,l/s = 10^{-2}\ m^3/s$.

La valeur minimale de la section bronchique correspondante est :

$$S_{min} \# 2\ cm^2 = 2.10^{-4}\ m^2$$

(la section totale des bronches des premières générations (tableau de la figure 5) est d'environ 2.5 cm^2. Elle a été volontairement minimisée pour tenir compte d'une éventuelle compression bronchique correspondant au débit maximal de 10 l/s).

Ceci fournit une surestimation de la vitesse maximale d'écoulement :

$$u_{max} = \frac{Q_{max}}{S_{min}} = \frac{10^{-2}}{2.10^{-4}} = 50\ m/s\ .$$

d'où

$$\text{Mach } \# \frac{50}{300} = 0,166 < 0.3\ .$$

Au cours de la simulation, il sera possible de vérifier a posteriori que le rapport $\frac{u}{c}$ ne dépasse pas $0.8\ 10^{-2}$ à 10^{-1}, ce quelque soit la génération.

L'air peut donc être considéré comme incompressible pendant son écoulement le long d'une bronche:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ce qui permet, compte tenu de l'hypothèse d'homogénéité, de réduire l'équation (1) à l'équation (3) :

$$(3) \qquad \operatorname{div} u = 0$$

En reportant (3) dans (2), avec de plus $f_e = 0$, (2) se simplifie en (4) :

$$(4) \qquad \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{\mu}{\rho} \Delta u\ .$$

- L'assimilation d'une bronche à un tube de section constante suggère l'approximation d'un écoulement quasi-unidimensionnel. L'élasticité de la paroi, cause de mouvements transversaux, ainsi que l'aspect microscopique de certaines bronches, attribuant à l'action visqueuse un rôle prépondérant peuvent rendre cette hypothèse contestable. Nous reviendrons plus loin sur sa validité (§ b).

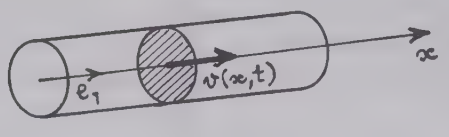
Il convient alors de remplacer l'équation (4) par une équation concernant la vitesse axiale moyenne sur une section bronchique v . En tenant compte des diverses hypothèses formulées, les grandeurs : pression, vitesse, section, ne sont plus fonction que de deux variables indépendantes :

$$P = P(x,t) - v = v(x,t) - S = S(x,t)$$

d'où

$$\frac{Dv}{Dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}\right) e_1$$

$$\operatorname{grad} P = \frac{\partial P}{\partial x} e_1\ .$$



$$(5) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + h(v,S)$$

avec $h(v, S)$: terme de frottement à expliciter (§ b).

L'équation de continuité (3) est remplacée par une liaison entre S et v qui traduit que pendant le temps δt , une variation δS de section sur une longueur δx se répercute en une variation de débit $\delta(S.v)$:

$$\delta(S.v)\,\delta t = -\,\delta S \times \delta x$$

d'où

$$\begin{cases} (6) \quad \dfrac{\partial(Sv)}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (5) \quad \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial P}{\partial x} + h\,(v, S) \end{cases}$$

Enfin, une des grandeurs accessibles à la mesure étant un débit, nous avons introduit la grandeur $\dot{V}(x,t) = S(x,t).\,v(x,t)$,

et l'équation (6) associée à :

$$\frac{\partial v}{\partial .} = \frac{1}{S}\,\frac{\partial \dot{V}}{\partial .} - \frac{\dot{V}}{S^2}\,\frac{\partial S}{\partial .}$$

fournit le système auquel nous avons finalement abouti :

$$\begin{cases} (7) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (8) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial(\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\,\dfrac{\partial P}{\partial x} + g\,(\dot{V}, S) \end{cases}$$

$g(\dot{V}, S)$: terme de frottement

système traduisant l'écoulement du fluide dans une bronche.

b) <u>au niveau global de l'arbre bronchique</u> :

L'hypothèse d'équirépartition des pressions pleurale et alvéolaire rend les 2^i bronches d'une même génération i absolument semblables ; elles ont mêmes dimensions géométriques (l_i, S_i) et sont soumises aux mêmes pressions externes. Il est donc possible de définir une équivalence entre la génération i et un tube unique caractérisé par une section $({}^iS_t)$, une longueur $({}^il_t)$, un débit $({}^i\dot{V}_t)$ tels que :

$$\begin{cases} {}^iS_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{2^i} S_j = 2^i\,S_i \qquad (i \in (0, 23)) \\ {}^il_t = l_i \\ {}^i\dot{V}_t = \text{débit total des } 2^i \text{ bronches de la génération } i = 2^i\,\dot{V}_i\,. \end{cases}$$

Cette équivalence assurant l'égalité du débit du tube unique et du débit total de la génération i , il sera possible de comparer directement le débit du tube unique équivalent à la génération 0 au débit buccal relevé expérimentalement.

Le système (7) (8) se transforme à l'aide des relations précédemment définies pour donner le système (9)(10)

$$\begin{cases} (9) \qquad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (10) \qquad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + 2^i \times g(\dot{V}, S) \end{cases}$$

où i indique la génération pour laquelle le système a été écrit.

Par rapport au système (7)(8), seul le terme de frottement a subi un changement.

La figure 2.12 montre que la dérivée partielle $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ concernant la section du tube unique est importante, surtout en ce qui concerne les dernières générations. Ceci conduit à reposer le problème de l'unidimensionnalité de l'écoulement. En effet, cette hypothèse sera valable sous réserve que les deux conditions :

$$\frac{dD}{dx} < 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{D}{R} < 2 .$$

soient réalisées (D : diamètre du tube - R : rayon de courbure local au point considéré).
(Ce critère traduit en effet que, sous réserve d'un profil du tube convenable, un écoulement tridimensionnel non nécessairement symétrique dans un tube rigide peut être pratiquement assimilé à un écoulement "quasi-unidimensionnel").

génération	valeurs approximatives de dD/dx	D / R
5	10^{-1}	10^{-2}
10	0.25	10^{-1}
16	3	10^{-1}

Les résultats portés dans ce tableau, obtenus à partir des données géométriques de Weibel, montrent qu'à partir de la 12ème génération, l'hypothèse d'unidimensionnalité selon l'axe x devient très discutable, et qu'il conviendrait, dans le domaine des dernières générations, d'écrire l'équation (4) pour la vitesse radiale d'écoulement. Cependant, la difficulté de résolution d'un système du type (9)(10) conduit à conserver cette hypothèse, quitte à ne simuler que le fonctionnement des 12 ou 13 premières générations.

Le système (9)(10) est complété par l'adjonction d'une équation traduisant le mouvement de la paroi. Nous ferons l'hypothèse d'une élasticité longitudinale nulle et décrirons le déplacement transversal par une équation d'état prise sous la forme :

$$f(S, PTM) = 0$$

où $PTM(x,t) = P(x,t) - P_{ext}(t)$ est la "pression transmurale" c'est-à-dire la différence des pressions régnant à l'intérieur et à l'extérieur de la paroi ; il est sous entendu que peuvent figurer dans f les dérivées partielles de S et P par rapport aux variables indépendantes x et t , d'ordre un ou d'ordre supérieur.

c) <u>hypothèses annexes</u> :

- Le terme de frottement $q(\dot{V}, S)$ est lié au type de l'écoulement : laminaire ou turbulent. La vitesse d'écoulement n'excèdant pas 30 m/s, la forme :

$$q(\dot{V}, S) = -\frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S}$$

concernant un écoulement laminaire, a tout d'abord été adoptée.

Le problème des frottements dus aux jonctions bronchiques n'a pas encore été soulevé ; dans le cas de l'étude de l'écoulement sanguin dans le réseau cardiovasculaire, il est fréquent d'introduire une fonction $\psi(P,x)$ dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \psi(P,x) = 0$$

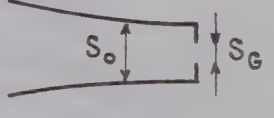
(Cette fonction pourrait également permettre de tenir compte du caractère asymétrique de l'arbre bronchique). Cependant, devant un manque d'informations concernant une éventuelle fonction ψ le problème des bifurcations a été abordé en faisant varier le terme de frottement :

$$q(\dot{V}, S) = k\frac{\dot{V}^n}{S^m} \quad (n, m \in R)$$

Certains auteurs (références [58] , [59]) ont en effet étudié l'influence des bifurcations sur l'existence de turbulences et le profil de l'écoulement, et fournissent des valeurs empiriques de m et n .

- L'ouverture de la glotte pendant une expiration dépend du débit expiratoire : elle passe de 40 à 100 % de sa valeur maximale pour un débit expiratoire variant entre 0,5 l/s et 4 l/s. Un gradient de pression ΔP a donc été introduit entre la génération 0 et la bouche, afin de tenir compte de ce phénomène :

$$\Delta P = \frac{\rho}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{S_G^2} - \frac{1}{S_o^2}\right)\dot{V}^2$$



avec $0,6 < \lambda < 0,7$

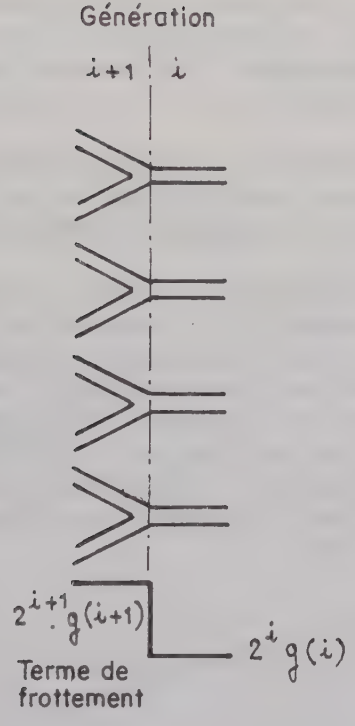
S_G : surface d'ouverture de la glotte $\left(S_G = S_G(\dot{V})\right)$

S_o : surface de la génération 0 .

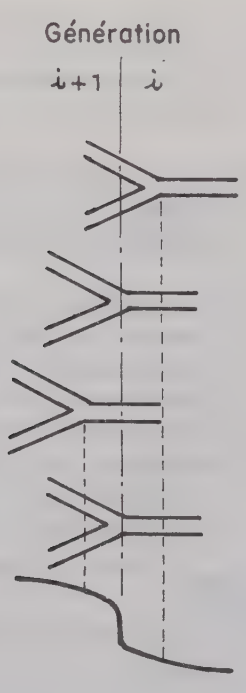
$S_G(\dot{V})$ est fournie dans la littérature (référence [37]).

- La faible variation relative de la pression alvéolaire permet de négliger la variation correspondante de la masse volumique du gaz alvéolaire avant l'écoulement, de telle sorte que la valeur de ρ constamment adoptée a été celle de la masse volumique de l'air sec à 37° C sous une atmosphère. (Des facteurs difficilement contrôlables tels que : degré d'humidité de l'air ou composition chimique ont donc simultanément été négligés).

- Il faut noter le caractère fictif de la décomposition de l'arbre bronchique en générations ; afin de se rapprocher de la réalité, le profil du tube a été lissé (figure 2.12) à partir des valeurs discrètes fournies par Weibel. De même, il convient de supprimer partiellement les discontinuités des termes de frottement $2^i \times g(\mathcal{V}, S)$ existant aux lieux de changement de génération : en effet, si ces discontinuités peuvent refléter une certaine localisation des points de bifurcation, une localisation systématique de toutes les 2^i bifurcations au point commun des générations i et $i+1$ ne correspond certainement pas à la réalité.



Localisation des points de bifurcation (Modèle de Weibel)



Variation progressive du terme de frottement.

Finalement, l'étude de l'écoulement aérien le long de l'arbre bronchique a été ramenée à celle de l'écoulement du même fluide le long d'un tube unique, cet écoulement étant régi par les N systèmes d'équations :

$$\begin{cases} (11) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (12) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{8\pi\mu}{\rho}\dfrac{\dot{V}}{S} \cdot 2^i \\ (13) \quad f(S, P - P_{pl}) = 0 \end{cases}$$

N : nombre total de générations

$$i \in (0, N-1)$$

2.2.4. - Remarques -

1) Il faut noter le caractère non stationnaire (existence de dérivées partielles par rapport au temps) et non périodique de l'écoulement. (La pression alvéolaire ne présente en effet aucune propriété de périodicité, contrairement par exemple au cas de la pression artérielle).

2) Au stade de l'élaboration du modèle, il est déjà prévisible que la relation $f(S, PTM) = 0$, traduisant le mouvement de la paroi bronchique, permettra sans doute de détecter la pathologie obstructive.

3) Le modèle ainsi proposé est intermédiaire entre un modèle de représentation de portée trop restreinte, et un modèle de connaissance trop complexe et prématuré au stade actuel de la connaissance du système pulmonaire. Il est fondé sur des hypothèses simplificatrices indispensables et imposées soit par un manque d'information sur le système, soit par des difficultés de résolution du problème pris dans toute sa généralité. C'est maintenant l'étape de simulation qui va confirmer ou infirmer le bien fondé de telles hypothèses.

2.3. - RECAPITULATION -

LE MODELE

L'arbre bronchique est assimilé à un tuyau dont la section est une fonction de deux variables indépendantes. A l'une des extrêmités de ce tuyau règne la pression alvéolaire $P_a(t)$, à l'autre la pression atmosphérique, et à l'extérieur règne uniformément la pression pleurale $P_{pl}(t)$. La respiration est assimilée à l'écoulement unidimensionnel d'un fluide incompressible dans ce tuyau, cet écoulement étant régi par les N systèmes d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 & (11) \\ \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{8\pi\mu}{\rho}\dfrac{\dot{V}}{S}\cdot 2^i & (12) \\ f(S, P - P_{pl}) = 0 & (13) \end{cases}$$

$i \in (0, N-1)$

N nombre total de générations.

avec $S = S(x,t)$; $\dot{V} = \dot{V}(x,t)$; $P = P(x,t)$; $P_{pl} = P_{pl}(t)$.

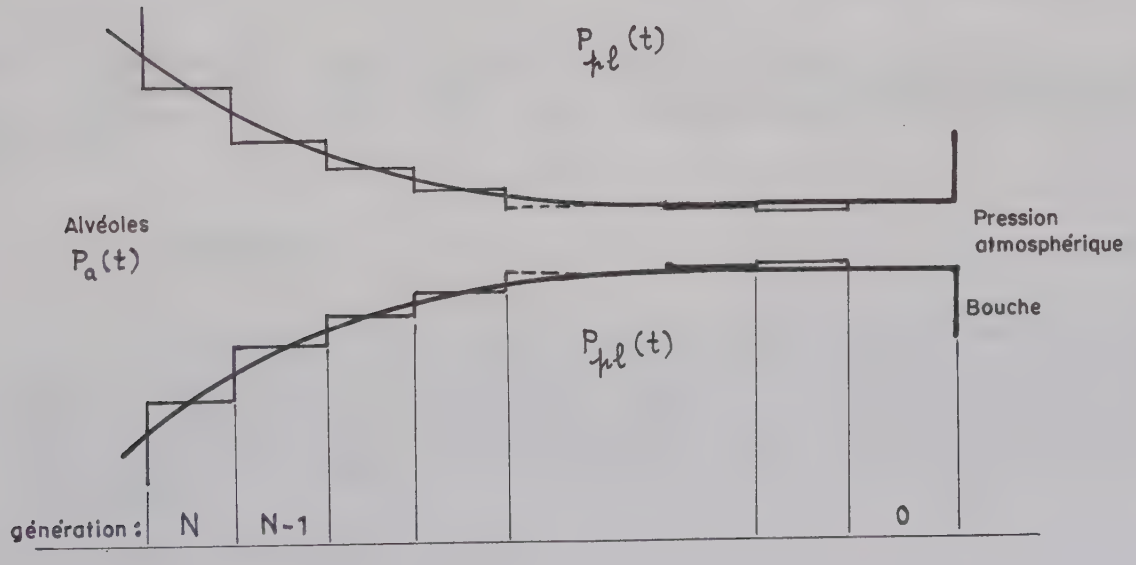


Figure 2.12

LES HYPOTHESES

Arbre bronchique :

symétrie
structure dichotomique régulière
bronche = tube cylindrique

Grandeurs physiques appliquées au système

pression pleurale
pression alvéolaire
} équirépartition

Ecoulement

homogénéité
incompressibilité
} de l'air

unidimensionnalité

---

* Les données numériques concernant la structure sont celles du tableau de la figure 2.5.

* La relation $f(S, P - P_{pl}) = 0$ devrait s'avérer caractéristique de la pathologie obstructive.

Chapitre 3

PROCESSUS EXPERIMENTAL - ACQUISITION DES DONNEES

Cette étude a pour particularité d'avoir consisté à simuler le comportement du système pulmonaire à partir de mesures réellement effectuées sur des patients, et non pas en utilisant un système d'entrées-sorties idéalisé. Ceci correspond d'une part à l'orientation du travail vers une future exploitation quantitative du modèle, résultant par exemple d'une identification paramétrique, et, d'autre part au fait que les entrées du système sont difficilement idéalisables à l'aide de fonctions simples (voir les figures 3.5 et 3.8 représentant le système d'entrées-sorties).

3.1. - PROCESSUS EXPERIMENTAL -

Il est évident que l'information qui peut être retirée de l'observation d'un système dépend de la façon dont celui-ci est excité. Il ne sert malheureusement à rien ici de rechercher les entrées optimales. En effet, la nature de l'objet étudié impose le choix d'une des expériences réalisables sans traumatisme pour le patient.

Ce choix se limite donc d'emblée à des manoeuvres de respiration qui se distinguent les unes des autres par l'importance du volume gazeux échangé avec l'extérieur, ou encore par la rapidité de cet échange. Les respirations normales ou par halètement (c'est-à-dire à fréquence élevée) sont aussi peu révélatrices de la pathologie obstructive les unes que les autres, sans doute à cause de la faible variation de volume pulmonaire qu'elles occasionnent.

L'expiration forcée semble au contraire sensibiliser une certaine forme de la pathologie obstructive. C'est donc le processus expérimental qui a été adopté.

3.1.1. - Définition -

L'expiration forcée est une expiration au début de laquelle le degré d'inflation pulmonaire est maximal, et au cours de laquelle un effort des muscles respiratoires, volontairement supérieur à l'effort normal, produit une pression alvéolaire telle que la presque totalité du gaz initialement contenu dans les poumons est rejetée pendant les deux premières secondes d'expiration.

3.1.2. - Intérêt -

La courbe de la figure 3.1. représente le débit buccal observé au cours d'une telle expérience ; l'aire hachurée le volume recueilli à la bouche pendant la première seconde d'expiration (V.E.M.S.).

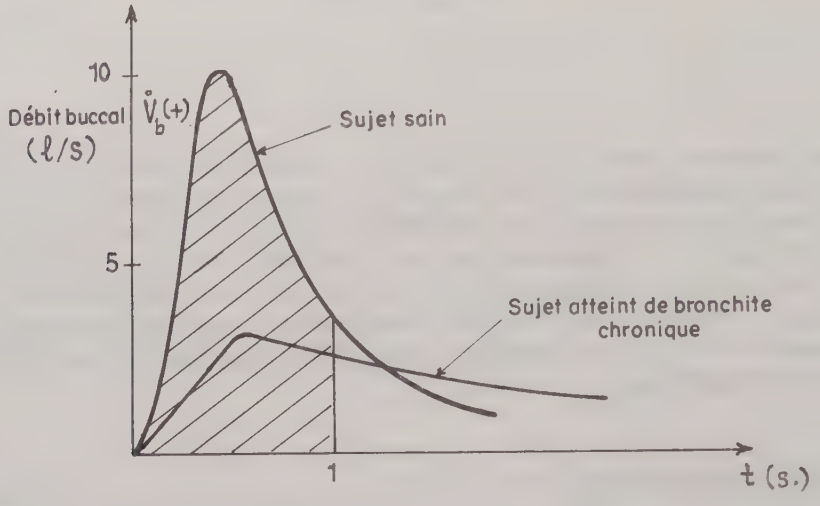


Figure 3.1

Ce volume permet déjà à l'heure actuelle de détecter certaines maladies respiratoires.

Sujet	Capacité pulmonaire totale	V.E.M.S.
normal	6.1 ℓ.	4 ℓ.
atteint d'asthme	6.5 ℓ.	0.8 ℓ.
atteint de bronchite chronique	7.5 ℓ.	0.5 ℓ.

La figure 3.2. permet de comparer les amplitudes des pressions pleurales et des débits buccaux atteints au cours d'expirations normales et forcées.

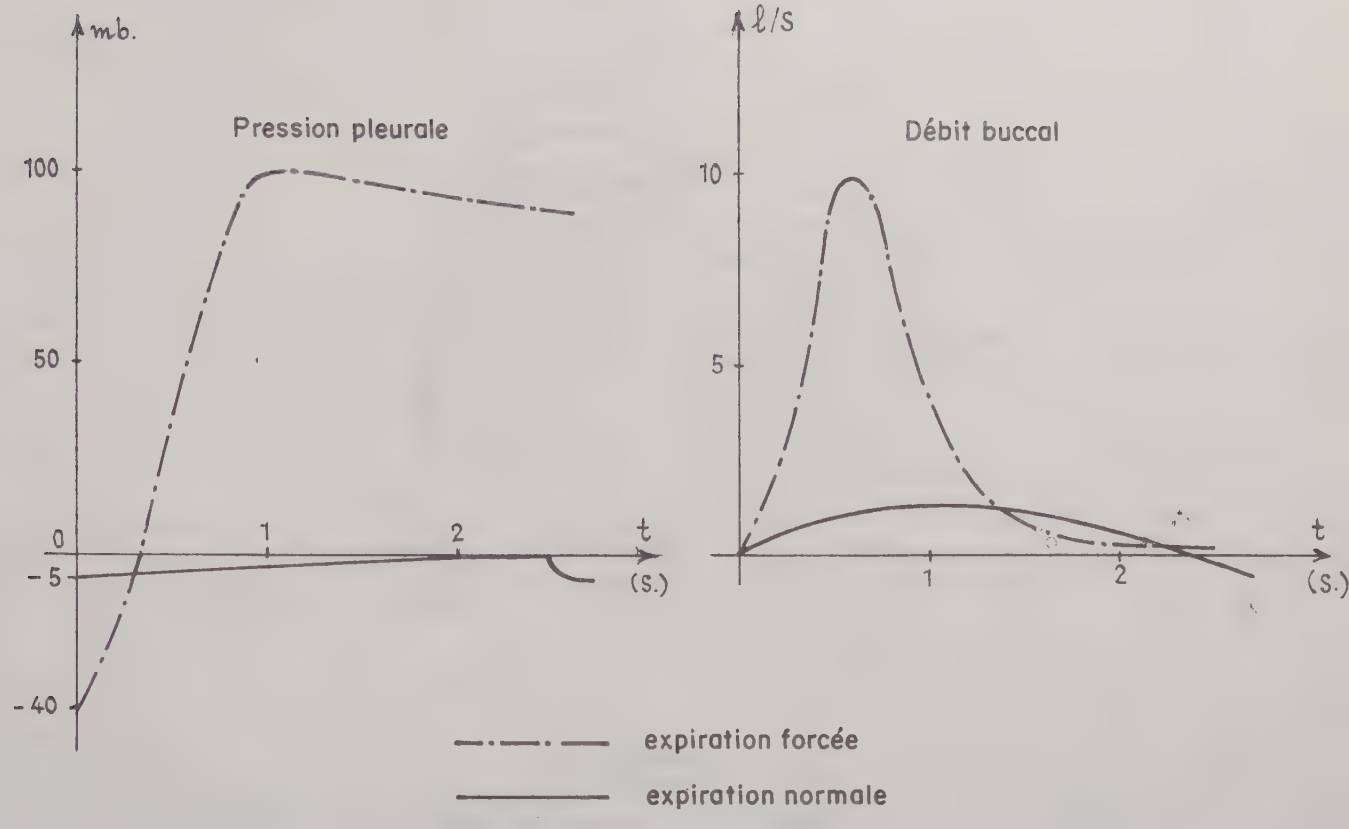


Figure 3,2

(Toutes les pressions sont exprimées relativement à la pression atmosphérique, d'où la présence de "pressions négatives" comme la pression pleurale initiale).

En définitive, l'intérêt de ce processus expérimental est de permettre de développer des pressions et débits variant dans d'importantes proportions et très rapidement. Les parois bronchiques sont probablement, au cours d'un tel processus, soumises à des pressions transmurales de "dynamique" $\left(\frac{\partial PTM}{\partial t}\right)$ élevée. Il semble donc particulièrement intéressant d'avoir caractérisé le modèle à l'aide de l'équation d'état des parois bronchiques, cette équation étant sans doute significativement liée à la pathologie respiratoire.

3.2. - ACQUISITION DES DONNEES -

Les grandeurs directement mesurables au cours d'une expiration forcée sont la pression pleurale et le débit buccal. La pression alvéolaire est estimée indirectement.

3.2.1. - Pression pleurale.

Cette pression est mesurée en introduisant par voie nasale un ballonnet jusque dans l'oesophage (figure 3.3). Ce ballon est gonflé avec environ 1 ml d'air de façon à venir en contact des parois de l'oesophage. Un cathéter

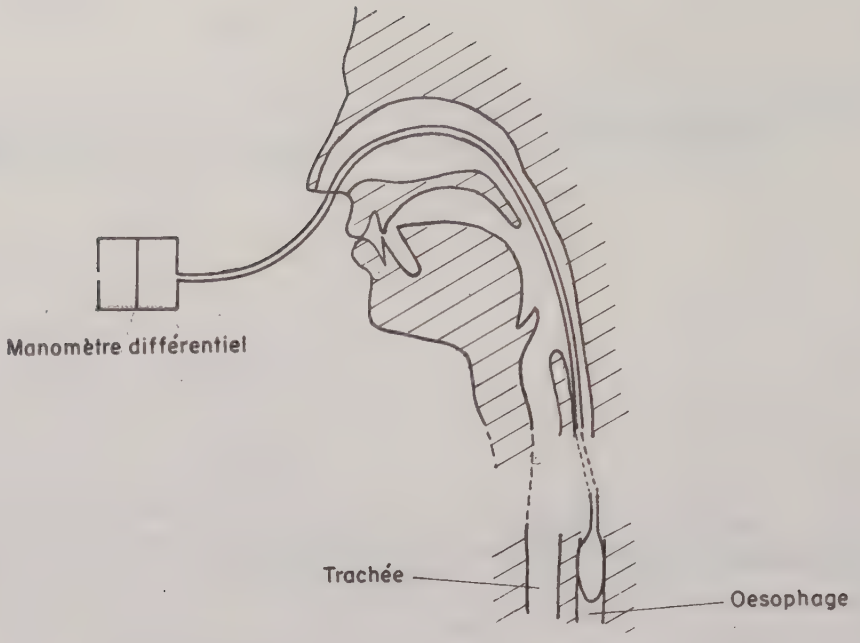


Figure 3.3

Mesure de la pression pleurale

de 2 à 2,5 mm de diamètre relie ce ballon à un capteur de pression. Il ressort de travaux portant sur cette méthode classique de mesure de la pression pleurale, d'une part que la bande passante des cathéters utilisés est suffisante compte tenu du spectre de fréquence de P_{pl} , et, d'autre part, qu'un enfoncement d'environ 40 cm du cathéter permet d'éviter des perturbations dues aux battements cardiaques.

L'hypothèse d'identité de la pression pleurale réelle et de la pression à laquelle sont soumises les parois de l'oesophage au point de mesure choisi est sans doute critiquable. Néanmoins, cette méthode est la seule méthode non traumatisante de mesure de P_{pl} réalisable à l'heure actuelle, et c'est pourquoi elle a été adoptée.

3.2.2. - Débit buccal -

Un pneumotachographe Jaeger, dont la fonction de transfert a été étudiée (second ordre en $\dot{V}$ de la relation pression de sortie - débit d'entrée $\dot{V}$; référence [60]), est associé à un manomètre différentiel de façon à fournir le débit buccal (figure 3.4).

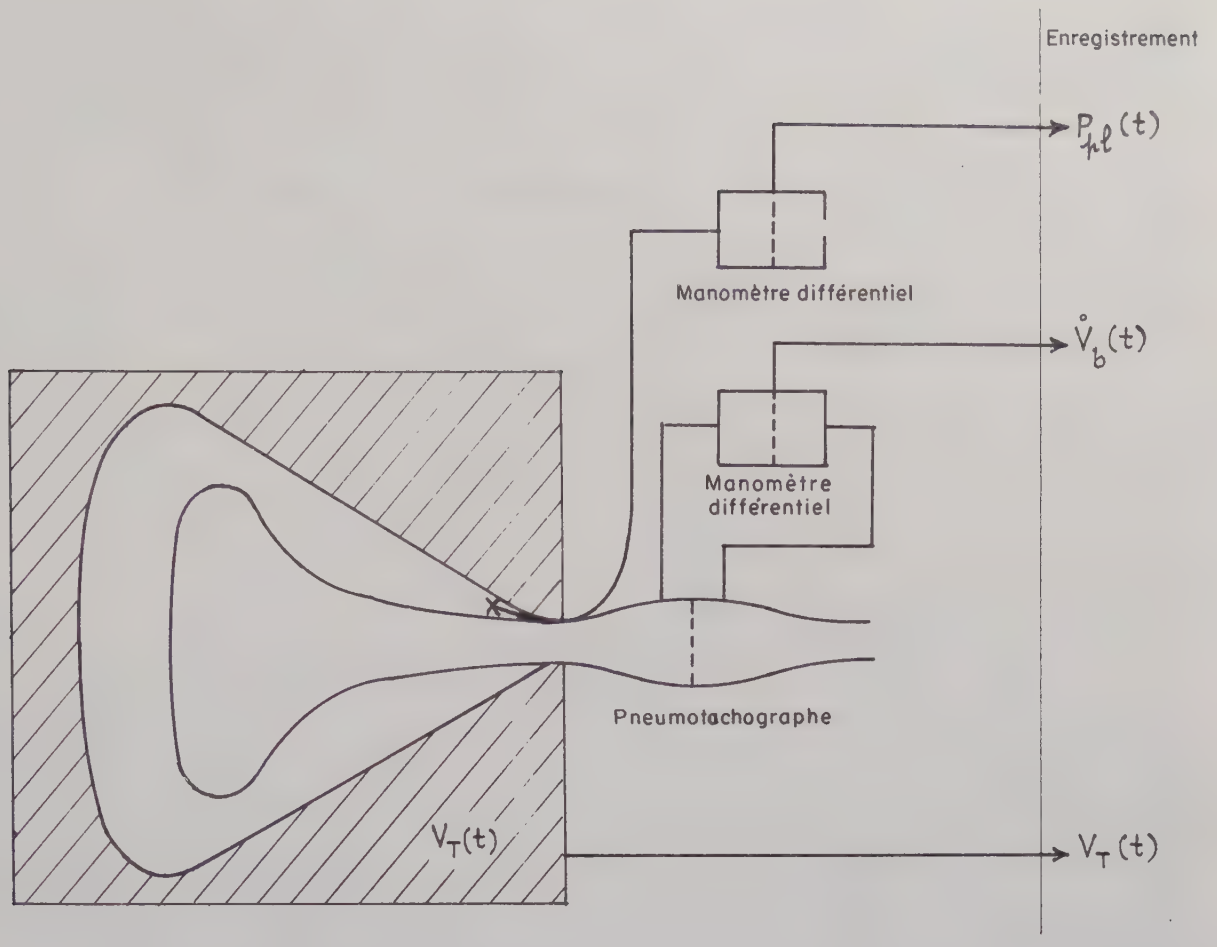


Figure 3.4

Acquisition des données

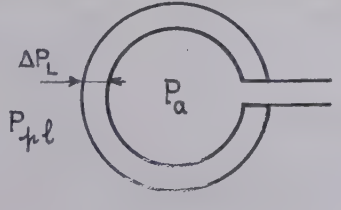
La figure 3.5. représente des enregistrements de $\dot{V}_b(t)$ et $P_{pl}(t)$ dans les cas de deux expirations forcées :

① "forcée-forcée" - le sujet produit un effort musculaire particulièrement intense et bref -

② "forcée-normale".

3.2.3. - Pression alvéolaire.

Il n'est matériellement pas possible de glisser un capteur de pression ou un cathéter jusque dans un alvéole. La pression alvéolaire doit donc être obtenue par une méthode indirecte. Cette méthode consiste à évaluer la pression due à l'élasticité tissulaire alvéolaire ΔP_L définie par la relation :



$$P_a(t) = P_{pl}(t) + \Delta P_L(t)$$

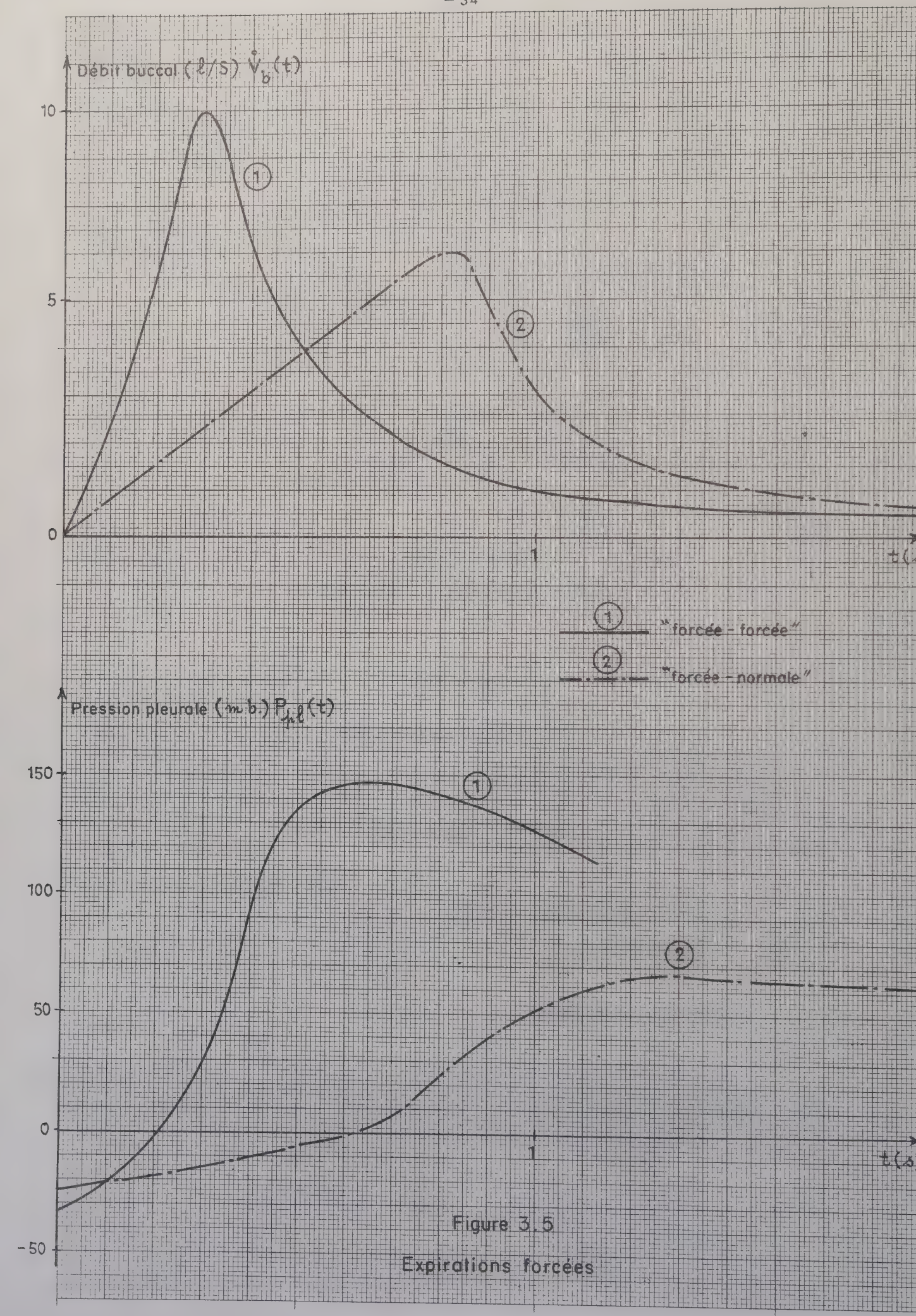


Figure 3.5

Expirations forcées

(L'hypothèse d'homogénéité de ΔP_L sur la totalité de la surface alvéolaire est implicitement formulée par l'association de cette relation et des hypothèses d'équirépartition des pressions pleurale et alvéolaire).

L'évaluation de P_a se décompose en deux étapes :

1) $\Delta P_L = f(V_T)$ est déterminée par l'expérimentation suivante : le patient est enfermé dans une enceinte (ou pléthysmographe), de façon à ce que les variations du volume périthoracique V_T puissent être calculées (figure 3.6).

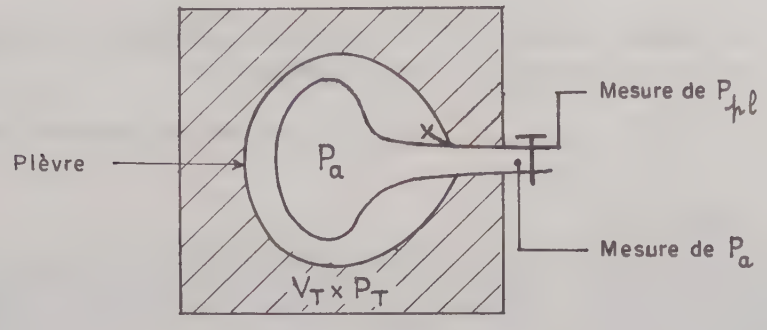
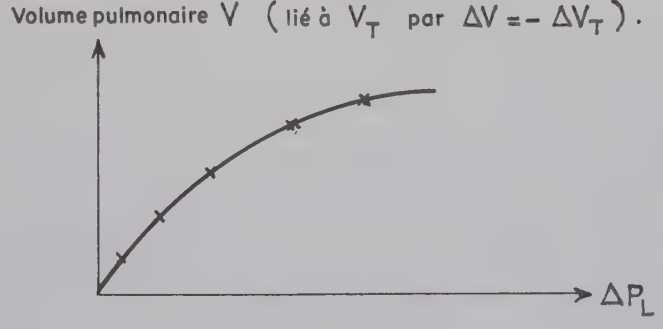


Figure 3.6 - Mesure de ΔP_L

Il expire vers l'extérieur de l'enceinte au travers d'un dispositif permettant d'interrompre l'écoulement gazeux.

Si le débit est stoppé suffisamment longtemps, la pression alvéolaire se répartit uniformément des alvéoles à la bouche de façon à ce qu'un capteur de pression placé en amont de l'interrupteur de débit fournisse directement la valeur de P_a . La pression $P_T(t)$ (figure 3.6) est également relevée, ce qui, sous réserve d'une compression adiabatique du gaz de l'enceinte fournit $V_T(t)$.

Finalement, cette expérience permet de déterminer la relation : $\Delta P_L = f(V_T)$ aux différents instants d'interruption du débit buccal.



2) Connaissant la relation $\Delta P_L = f(V_T)$ il est maintenant possible de déterminer ΔP_L au cours d'une expiration forcée, à condition d'enregistrer $V_T(t)$ au cours de cette dernière expérience. C'est pourquoi le procédé pléthysmographique d'évaluation de V_T est également utilisé lors d'une expiration forcée.

Il apparait clairement que les mesures préliminaires sont effectuées dans des conditions statiques (arrêt du débit buccal pendant un temps suffisamment long pour que P_a soit répartie). Il est donc admis ici que les parois alvéolaires, contrairement aux parois bronchiques, sont suffisamment souples pour que leurs comportements en régimes dynamique et statique soient pratiquement semblables, c'est-à-dire pour que les résultats de l'expérience préliminaire soient applicables au cas de l'expiration forcée.

La courbe $\Delta P_L = f(V)$ concernant un sujet normal est reportée sur la figure 3.7.

A l'instant initial de l'expiration forcée, les poumons sont supposés être gonflés au maximum de leur capacité :

$$V(0) = V_m \qquad (V_m \text{ : volume pulmonaire maximal, figure 3.7})$$

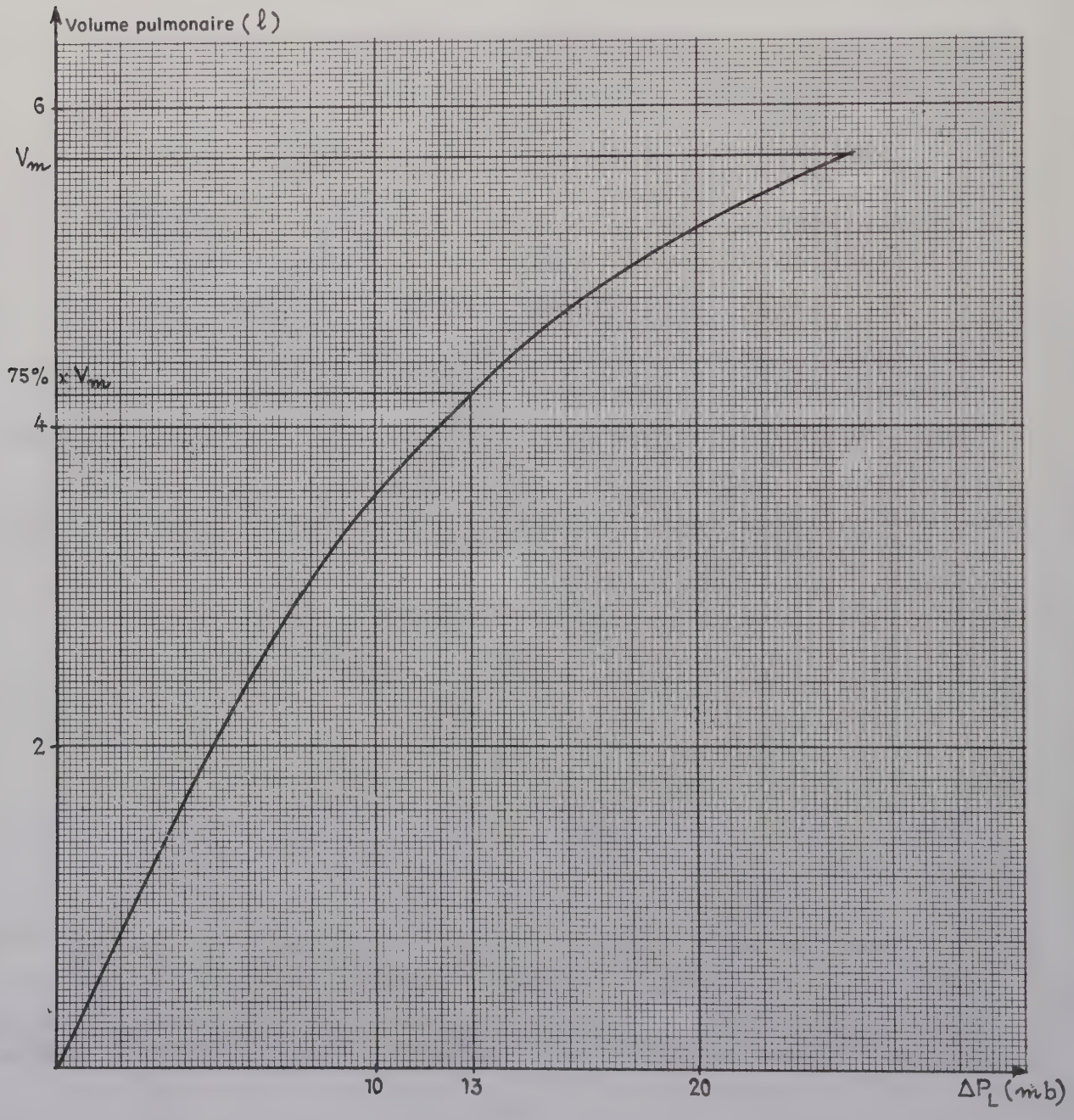


Figure 3.7

PAS D'ÉCHANTILLONNAGE : $\Delta T = 100\,ms$; INSTANT INITIAL : DÉBUT D'EXPIRATION

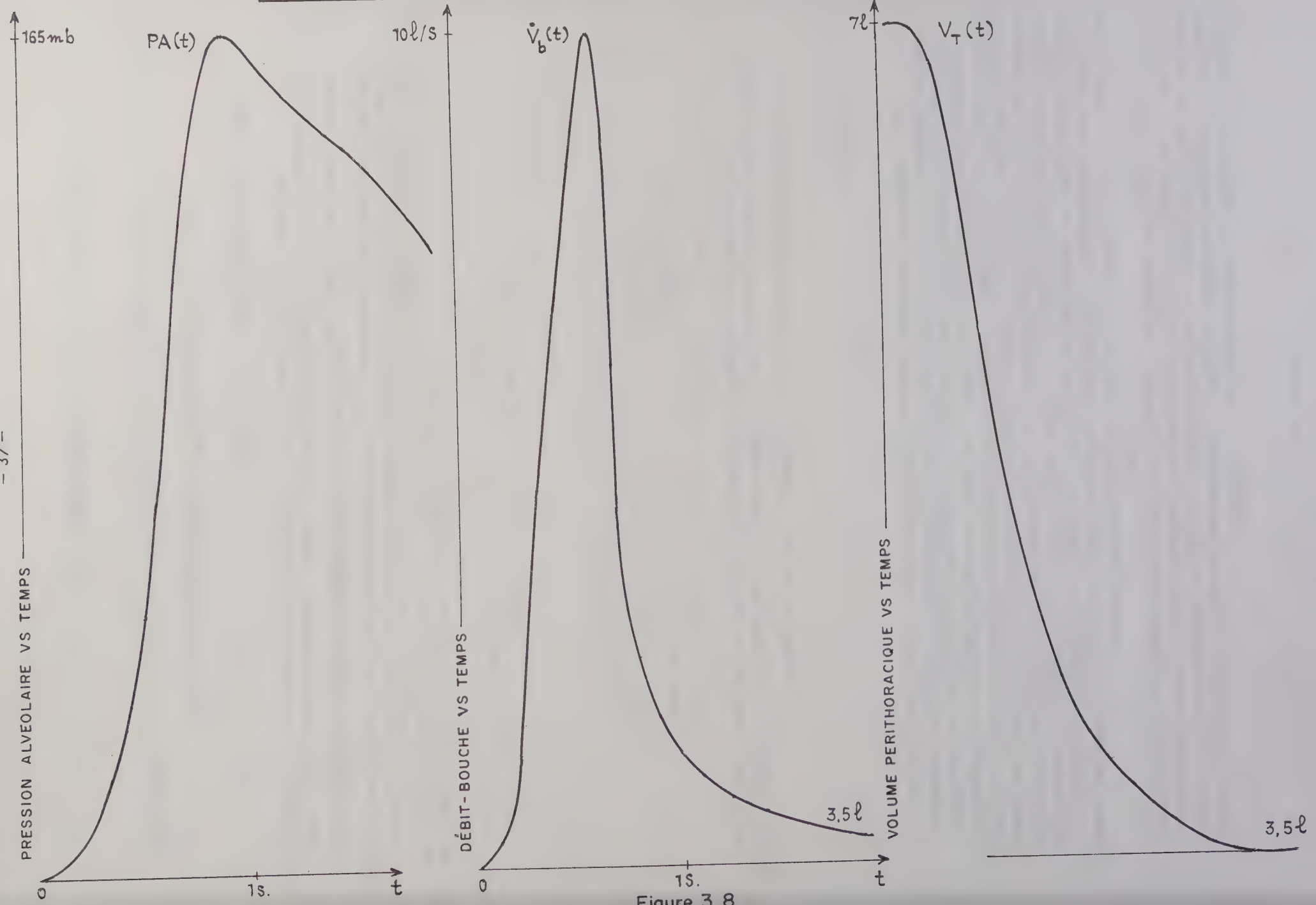


Figure 3.8

ΔP_L est obtenue à un instant T quelconque par :

$$\Delta P_L(T) = f\left(V_m - \sum_{I=1}^{T} \Delta V_T(I)\right)$$

$$\Delta P_L(T) = f\left(V_m - \left(V_T(0) - V_T(T)\right)\right)$$

(compte tenu du fait que : $\Delta V_T = -\Delta V$).

La relation f n'étant connue qu'aux points de mesure de l'expérience préliminaire, il n'est pas concevable d'utiliser l'expression de ΔP_L sous cette forme. De façon à pouvoir calculer $\Delta P_L(T)$ quel que soit l'instant de calcul, il convient de donner à f une forme algébrique. Des tentatives d'ajustement par la méthode des moindres carrés conduisent aux résultats suivants, pour le sujet considéré :

$$\begin{cases} \Delta P_L = e^{0,427\left(V(T)+1,78\right)} \\ \Delta P_L \text{ en mb} \ ; \quad V(T) \text{ en litres} \\ \text{pour } V(T) > 1.6\ \ell. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} P_a(T) = P_{pl}(T) + e^{0.427\left(V_m - \left(V_T(0) - V_T(T)\right) + 1,78\right)} \\ P_a \text{ et } P_{pl} \text{ en mb} \ ; \quad V_m,\ V_T(0),\ V_T(T) \text{ en litres} \\ \text{avec } V_m \neq 5,7\ \ell. \end{cases}$$

La figure 3.8. représente la pression alvéolaire calculée lors d'une expiration forcée effectuée par ce même sujet, et correspondant au débit $\dot{V}_b(t)$ et au volume périthoracique $V_T(t)$ également fournis en figure 3.8.

3.3. - CONCLUSION -

De nombreuses critiques peuvent être formulées à l'égard de l'acquisition des données, plus particulièrement en ce qui concerne la pression pleurale et la pression alvéolaire. Il est cependant indispensable d'adopter les méthodes de mesure qui viennent d'être décrites : ce sont les seules méthodes existant à l'heure actuelle. Leur domaine de validité correspond logiquement à celui des modèles du système pulmonaire élaborés jusqu'à ce jour, qui est formé par des processus expérimentaux au cours desquels les dynamiques de variation développées sont faibles (expiration normale). L'étude approfondie de la chaîne de mesure n'a pas été entreprise au stade de la simulation. En effet, à ce stade de l'étude, où seuls les comportements qualitatifs importent, une incertitude de mesure, même de l'ordre de dix pour-cent, n'est pas fondamentalement gênante.

Par contre, au stade de l'identification, c'est-à-dire de l'exploitation quantitative du modèle, il sera indispensable d'examiner avec rigueur les principes et degrés de précision de telles méthodes. Peut-être conviendra-t-il alors de définir de nouvelles méthodes de mesure, adaptées au processus expérimental sensibilisant la pathologie respiratoire qui a été choisi ?

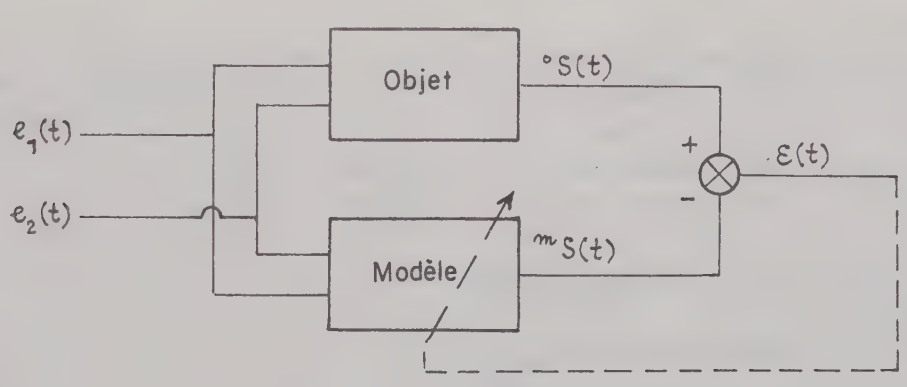
Chapitre 4

METHODE DE SIMULATION _ RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES

4.1. - METHODE GENERALE DE SIMULATION -

La simulation est l'étape de comparaison qualitative des comportements du système réel et du modèle, c'est-à-dire de leurs réponses (sorties) vis-à-vis de l'application de stimuli (entrées) (figure 4.1).

(Les indices $\begin{cases} 0 \\ m \end{cases}$ concerneront $\begin{cases} \text{l'objet} \\ \text{le modèle} \end{cases}$)



$$(e_1, e_2, s) = P_{fl}, P_a, \dot{V}_b)$$

$\varepsilon(t) = {}^{\circ}S(t) - {}^{m}S(t)$ écart modèle - objet	Simulation	Identification
détermination	évaluation qualitative	calcul quantitatif après définition d'une distance mathématique
conséquence : bouclage = tentative de minimisation de $\varepsilon(t)$	modification { des hypothèses / de la structure du modèle	identification des paramètres du modèle par utilisation d'un algorithme de minimisation

Figure 4.1 a

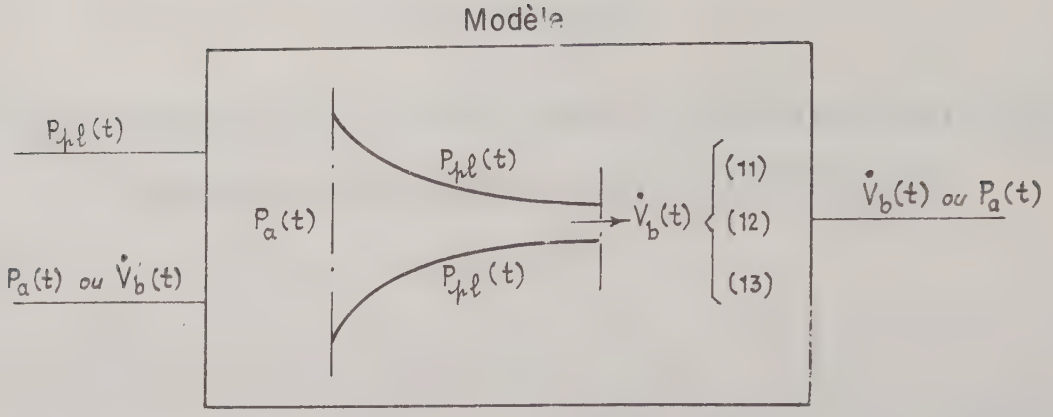


Figure 4.1 b

Dans le cas de cette étude, le système d'entrées-sorties est constitué des trois grandeurs mesurables (*) au cours d'une expiration forcée : $P_{pl}(t)$, $P_a(t)$ et $\dot{V}_b(t)$. Elles représentent les conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} (11) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (12) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{8\pi\mu}{\rho}\dfrac{\dot{V}}{S} \times 2^i \\ (13) \quad f(S, P - P_{pl}) = 0 \\ \qquad i \in (0, N-1) \end{cases}$$

Deux d'entre elles étant considérées comme les excitations e_1 et e_2 communes de l'objet et du modèle (figure 4.1 b), le problème de la détermination de $^m S(t)$ est celui de la résolution du système ((11), (12), (13)) lorsque deux fonctions aux limites sont connues. (Soit par exemple : déterminer le débit de sortie $^m\dot{V}_b(t)$ de l'écoulement régi par (11), (12), (13) lorsque la pression d'entrée $P_a(t)$ et la pression extérieure $P_{pl}(t)$ sont connues).

Il convient donc d'une part d'expliciter, dans la mesure du possible, la relation $f(S, PTM) = 0$, puis, d'autre part, de déterminer une méthode de résolution du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires (11), (12), (13)

(*) Par la suite, le terme "mesurable" sera employé par abus de langage dans le cas de l'évaluation indirecte de la pression alvéolaire.

4.2. - EQUATION D'ETAT $f(S, PTM) = 0$

4.2.1. - Position du problème -

Il n'est pas possible d'expliciter cette relation sous forme analytique. En effet, les propriétés d'élasticité de l'arbre bronchique sont, à l'heure actuelle, très mal connues. Les seules informations disponibles sur le comportement d'une bronche soumise à une pression transmurale sont les courbes de la figure 4.2. où D est le diamètre bronchique. Il s'agit là d'une étude de bronches excisées de chiens ou d'êtres humains, effectuée dans des conditions statiques d'application des pressions (référence [54]).

L'exploitation de ces résultats soulève quelques problèmes dans le cas de l'étude d'une expiration forcée. En effet, au cours d'une telle expérience, les dynamiques de variation des pressions sont 5 à 10 fois plus élevées qu'au cours d'une expiration normale. Une utilisation directe de ces courbes reviendrait donc à négliger l'inertie des parois bronchiques (β et γ nuls dans une équation, qui serait, par exemple, de la forme :

$$S = \alpha\, PTM + \beta \frac{\partial PTM}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 PTM}{\partial t^2})$$

Cependant, il est logique d'exploiter dans un premier temps cette unique information afin de simuler le comportement bronchique (courbes idéalisées de la figure 4.2).

$$\left(D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \; ; \quad S \text{ section bronchique} \right)$$

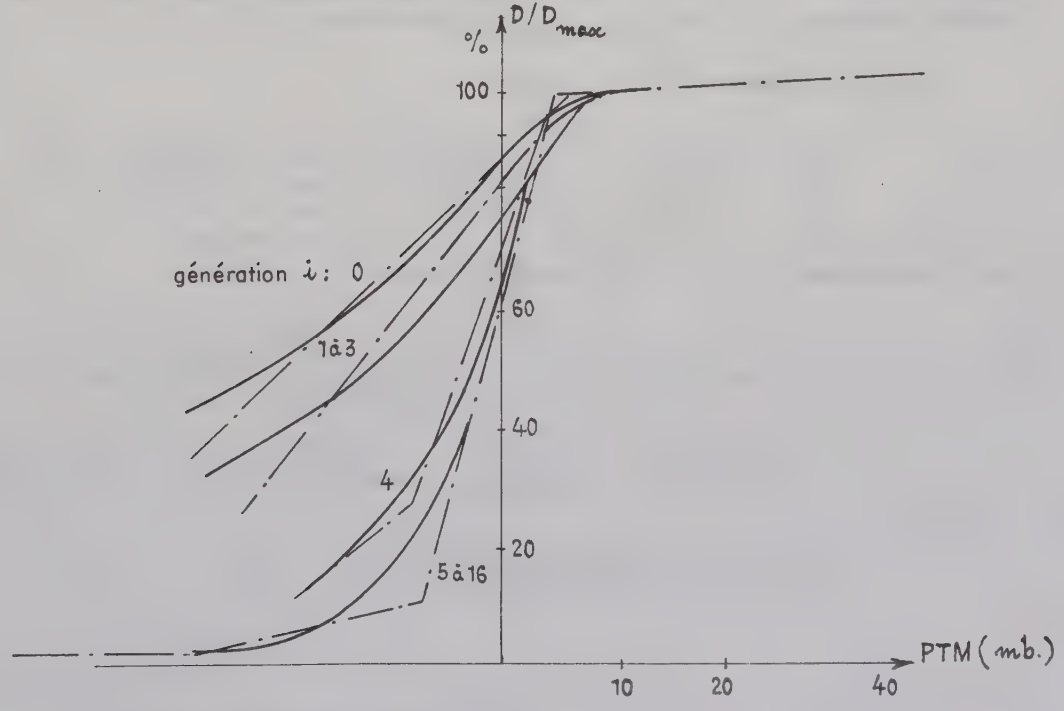


Figure 4.2

Liaison D/D max - PTM

4.2.2. - Difficultés dues à l'indétermination de cette relation -

Les difficultés rencontrées en simulation sont d'autant plus grandes que :

(1) vis-à-vis de la résolution du système (11)(12)(13) :

- La relation $f(S, PTM) = 0$ n'est pas fournie sous forme analytique
- Les courbes de la figure 4.2. mettent en évidence une différence des propriétés d'élasticité bronchique des premières aux dernières générations.
- Les relations idéalisées de la figure 4.2. font apparaître plusieurs types de non linéarités : seuil de pression transmurale, liaison parabolique entre S et PTM.

Ces divers facteurs ont conduit à adopter une méthode numérique de résolution du système d'équations ; nous verrons au § 4.3. que la relation $f(S, PTM)=0$ conditionne la stabilité de la procédure de résolution adoptée.

(2) La solution $^{m}S(t)$ de (11)(12)(13), correspondant aux mêmes conditions aux limites $(e_1(t)$ et $e_2(t))$ que la solution réelle $^{\circ}S(t)$, est une solution oscillante, lorsque (13) correspond à une inertie bronchique inférieure à l'inertie réelle.

Il est possible d'expliquer ce phénomène en supposant, par exemple, que le débit buccal et la pression pleurale sont les conditions aux limites connues. Il s'agit alors de déterminer $P_a(t)$

En développant (12) il vient :

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + 2\frac{\dot{V}}{S}\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} - \frac{\dot{V}^2}{S^2}\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{S}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S} \times 2^i$$

qui, associée à (11) : $\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t}$ donne :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{2\dot{V}}{S^2}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\dot{V}^2}{S^3}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S^2} \times 2^i$$

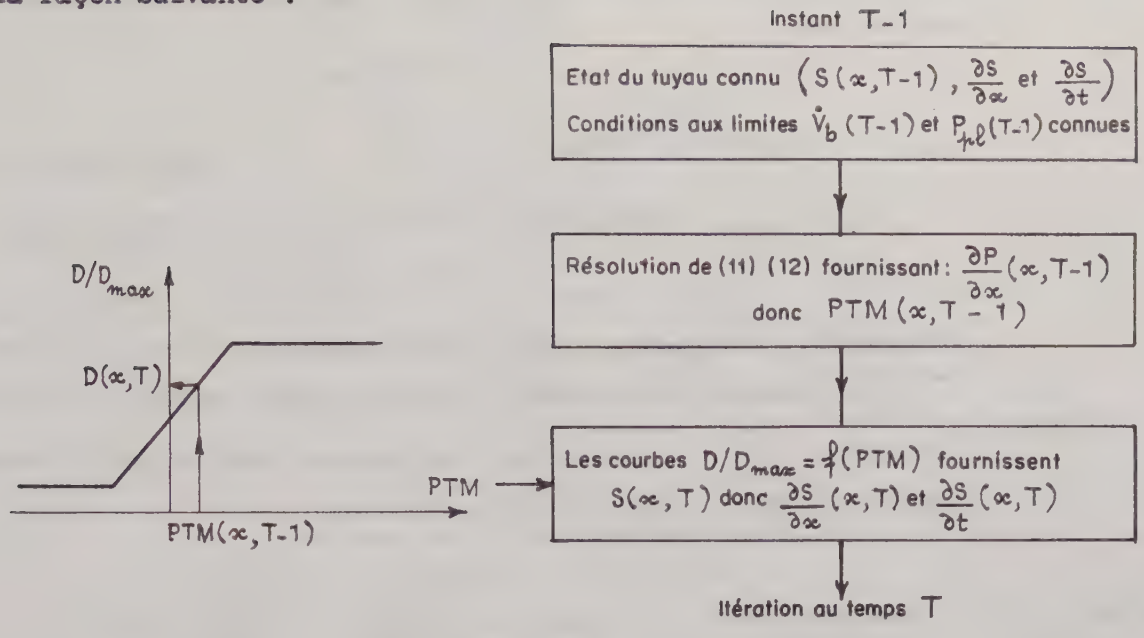
soit, en négligeant le terme de frottement (en première approximation):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \# -\frac{1}{S}\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{2\dot{V}}{S^2}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\dot{V}^2}{S^3}\frac{\partial S}{\partial x}$$

avec $\frac{\partial S}{\partial x} < 0$ et $\dot{V} > 0$

la résolution numérique du système (11)(12)(13) peut être envisagée de

la façon suivante :



En se plaçant dans le cas où la courbe réelle est située "au dessus" (figure 4.3) de la courbe adoptée pour la résolution du système, ce qui correspond à une inertie bronchique réelle plus importante que l'inertie adoptée, et en supposant qu'à l'instant (T-1) la résolution numérique ait été correcte (c'est le cas par exemple au début de l'expiration : alors $\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} > 0$, les sections du tuyau sont encore toutes maximales ou viennent de commencer à décroitre : $\frac{\partial S}{\partial t} \leqslant 0$).

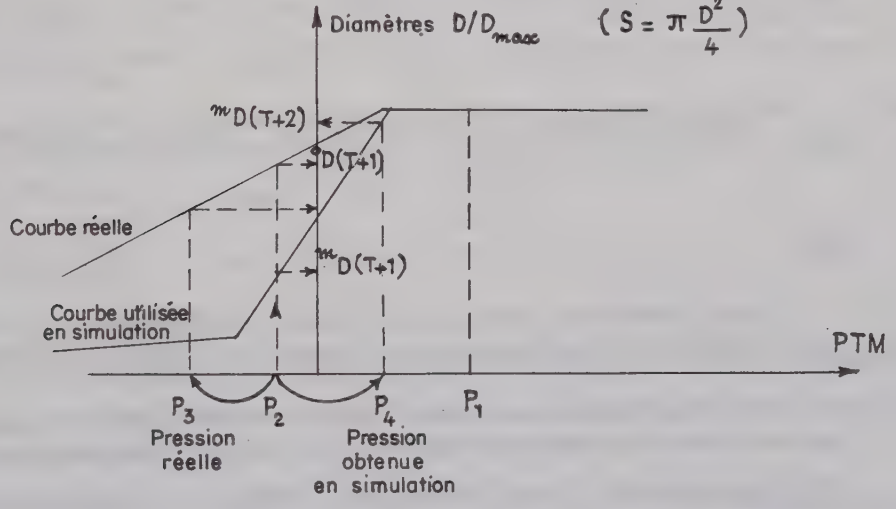


Figure 4.3

Alors, dans ce cas :

$$^{m}PTM(T-1) = {}^{o}PTM(T-1) = P_1$$

La résolution de (11) + (12) fournit les pressions internes ${}^{m}P(T)$ telles que :

$$ {}^{m}P(T) = {}^{\circ}P(T) $$

donc ${}^{m}PTM(T) = {}^{\circ}PTM(T) = P_2$ (pour toutes les générations)

Mais à P_2 correspondent ${}^{m}D(T+1)$ et ${}^{\circ}D(T+1)$ tels que :

$$ {}^{m}S(T+1) < {}^{\circ}S(T+1) $$

L'équation (14) montre alors que le calcul des dérivées partielles $\left({}^{m}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right)$ fournit des valeurs inexactes, supérieures aux valeurs réelles en effet, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right.$, compte tenu des signes communs des différents termes, croît en module lorsque S décroît), donc

$$ {}^{m}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) > {}^{\circ}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) $$

ou

$$ \begin{cases} P_4 = {}^{m}PTM(T+1) > {}^{\circ}PTM(T+1) = P_3 \\ \text{et} \quad {}^{m}P_a(T+1) > {}^{\circ}P_a(T+1) \end{cases} $$

Il faudrait maintenant situer P_4 par rapport à P_2. En fait, la position de P_4 par rapport à P_2 dépend de l'écart entre la courbe réelle et la courbe adoptée. Les résultats de la simulation prouveront que P_4 est rejeté vers P_1 même pour un écart assez faible. Et, dès lors :

$$ {}^{m}S(T+2) > {}^{\circ}S(T-2) \qquad et \qquad {}^{m}P_a(T+2) < {}^{\circ}P_a(T+2) $$

D'où le caractère oscillant de ${}^{m}P_a(t)$, qui correspond aux alternances de :

$$ {}^{m}S > {}^{\circ}S \quad puis \quad {}^{\circ}S > {}^{m}S $$

ou

$$ {}^{m}P_a > {}^{\circ}P_a \quad et \quad {}^{m}P_a < {}^{\circ}P_a $$

Les pressions alvéolaires ainsi simulées ont la forme indiquée sur la figure 4.4. (se reporter au chapitre V pour les résultats quantitatifs)

Il faut noter que l'amplitude de ces oscillations est très importante vis-à-vis de celle de ${}^{\circ}P_a(t)$, et que la solution numérique diverge très rapidement. Dans le cas de l'adoption d'une courbe $D/D_{max} = f(PTM)$ trop "raide" (par exemple, une courbe statique de D.F. Proctor), il sera possible, en effet, de constater en simulation que $S(x,t)$ oscille entre

$$ S_{max}(x) \quad et \quad S_{max}(x) \# (1/100) \times S_{max}(x) $$

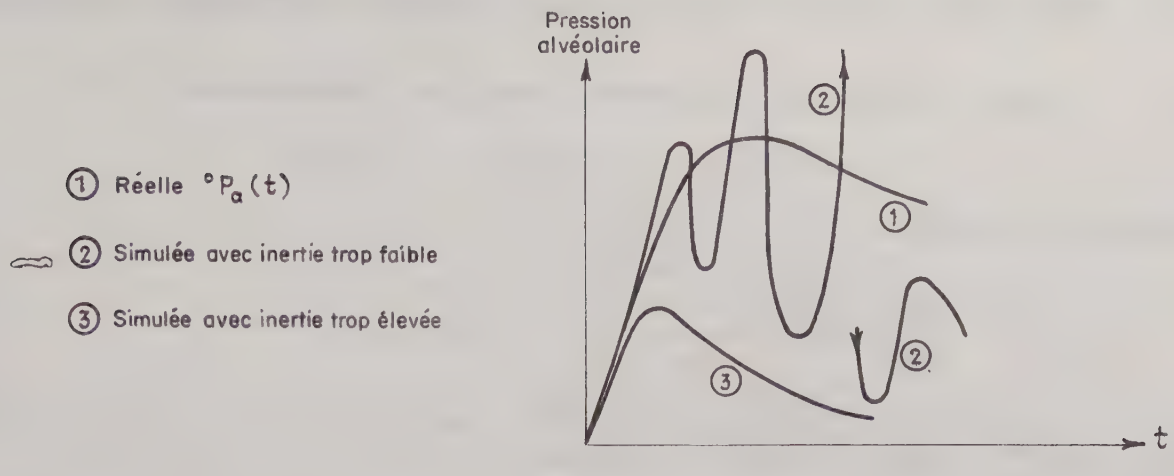


Figure 4.4
Influence de la relation $f(S,PTM)$ sur la simulation de $P_a(t)$.

Par contre, il s'avère que dans le cas de l'adoption d'une relation $D/D_{max} = f(PTM)$ correspondant à une inertie supérieure a l'inertie réelle, le phénomène d'oscillation de P_a disparait. (Dans ce cas, en effet, la section du modèle reste toujours supérieure à celle de l'objet ce qui explique :

$$^{m}P_a(t) < {}^{\circ}P_a(t) \quad)$$

L'oscillation de $^{m}S(t)$ pourrait ainsi être un moyen d'apprécier l'inertie bronchique réelle. Malheureusement, d'autres facteurs peuvent avoir une influence semblable sur $^{m}S(t)$; en particulier, lorsque le système (11)(12)(13) est résolu par une méthode numérique conditionnellement stable, un choix de pas de calcul ne satisfaisant pas le critère de stabilité de la procédure provoque également une divergence de $^{m}S(t)$.

Il semble donc préférable, à la vue de ces résultats, d'adopter une inertie délibérément plus élevée, puis de la diminuer, plutôt que l'inverse.

4.2.3. - Conclusion -

La connaissance expérimentale et restreinte de la relation $f(S,PTM)=0$, bien plus encore que l'incertitude inhérente aux méthodes de mesure, par exemple, est contraignante. Il a donc été nécessaire :

1) de proposer une forme analytique originale pour cette relation (voir chapitre V § 5.2).

2) d'entreprendre une exploration du système pulmonaire qui permette une observation du comportement dynamique des bronches (voir chapitre VI § 6.3).

4.3. - RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES -

Soient trois fonctions de deux variables indépendantes x et t :

$$S(x,t) \quad , \quad \dot{V}(x,t) \quad , \quad P(x,t)$$

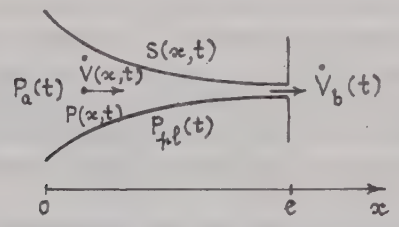
vérifiant le système :

$$\begin{cases} (11) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (12) \quad \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\dot{V}^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - 8\pi \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\dot{V}}{S} \times 2^i \qquad (i \in (0,23)) \\ (13) \quad f(S, P - P_{fl}) = 0 \end{cases}$$

où P_{fl} est une fonction d'une variable, $P_{fl}(t)$, connue.

Il s'agit de résoudre ce système, connaissant :

- les conditions initiales $S(x,0)$, $\dot{V}(x,0)$, $P(x,0)$. (La détermination de ces conditions est exposée au chapitre V § 5.1).
- l'une des fonctions aux limites : $P_a(t)$ ou $\dot{V}_b(t)$.



aux limites $x = 0$ et $x = \ell$:

$P(0,t) = P_a(t)$ et $\dot{V}(\ell,t) = \dot{V}_b(t)$

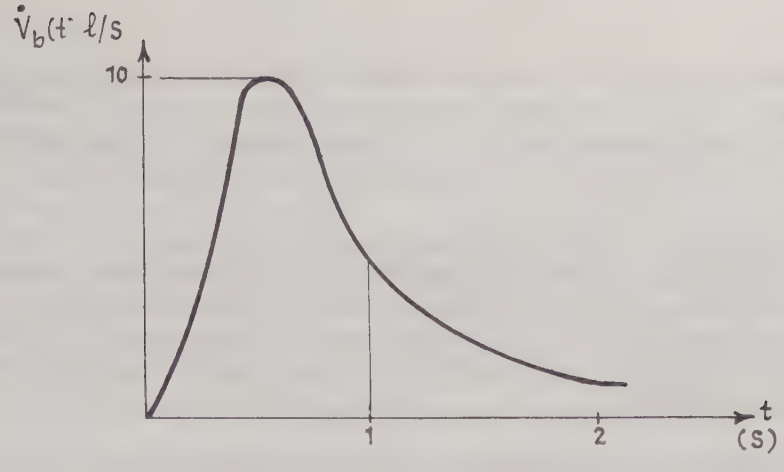
($\dot{V}(x, t)$ sera également noté $Q(x,t)$).

La résolution du problème ainsi posé permettra en effet, connaissant une des excitations $P_a(t)$ ou $\dot{V}_b(t)$ du modèle, d'en déterminer la réponse $\dot{V}_b(t)$ ou $P_a(t)$ (voir figure 4.1).

4.3.1. - Choix d'une méthode numérique de résolution -

Le système (11)(12)(13) est non linéaire : (12) contient des produits de fonctions inconnues $\dfrac{\dot{V}}{S}\dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x}$, $\dfrac{\dot{V}^2}{S^2}\dfrac{\partial S}{\partial x}$ ou $S\dfrac{\partial P}{\partial x}$: (13) est elle-même non-linéaire (§ 4.2).

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires sont nombreuses ; il est par conséquent logique de tenter de linéariser (11)(12)(13). Or l'observation des fonctions aux limites, en particulier de $\dot{V}_b(t)$, montre qu'une linéarisation de (12) n'est pas envisageable :



le terme $\frac{\partial \dot{V}}{\partial t}$ ne peut pas être considéré comme prépondérant pendant toute l'expiration, en particulier par rapport au terme $\frac{\dot{V}^2}{S^2}\frac{\partial S}{\partial x}$ qui, comme l'indique le profil du tuyau, est grand pour x faible (figure 5.8).

Il n'existe pas de méthode générale de résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires sont mises en échec par les non-linéarités ; ainsi, la superposition de solutions élémentaires n'est pas solution ; la méthode de séparation des variables $(P(x,t) = f(x)\,g(t))$ ayant pour but de conduire à un système d'équations différentielles soluble, échoue à cause de la non-linéarité de S par rapport à PTM (équation (13)).

Le système (11)(12) a été obtenu après simplification du système général tridimensionnel de Navier-Stokes. La résolution de celui-ci a fait l'objet de nombreuses études (référence [22]). Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, l'existence d'une solution a été démontrée (référence [18]). Cependant, à notre connaissance, la question de l'unicité reste ouverte pour un écoulement tridimensionnel.

Les observations suivantes incitent alors à choisir une méthode numérique de résolution de (11)(12)(13) :

- Si le terme de frottement $\frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S} \times 2^i$ n'est pas négligé, ce sont en réalité 24 systèmes du type (11)(12)(13) qui doivent être résolus. L'indice i ne peut, d'autre part, pas être relié algébriquement à x car c'est sous forme discrète que les longueurs $\ell(i)$ des générations bronchiques sont fournies.

- Les conditions aux limites $P_a(t)$ et $\dot{V}_b(t)$ sont acquises sous forme analogique au cours du processus expérimental.

- La fonction $S(x,0)$ est fournie dans la littérature sous forme discrète. Des tentatives d'ajustement de $S(x,t)$ à des formes algébriques par la méthode des moindres carrés ont été faites; cependant, une forme algébrique valable à l'instant t_1 ne l'est pas à un autre instant t_2 (comportement bronchique différent suivant la génération).

- L'équation (13) est fournie numériquement sous forme de courbes (figure 4.2). Elle fait apparaître des seuils de pressions transmurales, des inhomogénéités de comportement entre les diverses générations, ainsi qu'une fonction auxiliaire $P_{fl}(t)$ connue analogiquement.

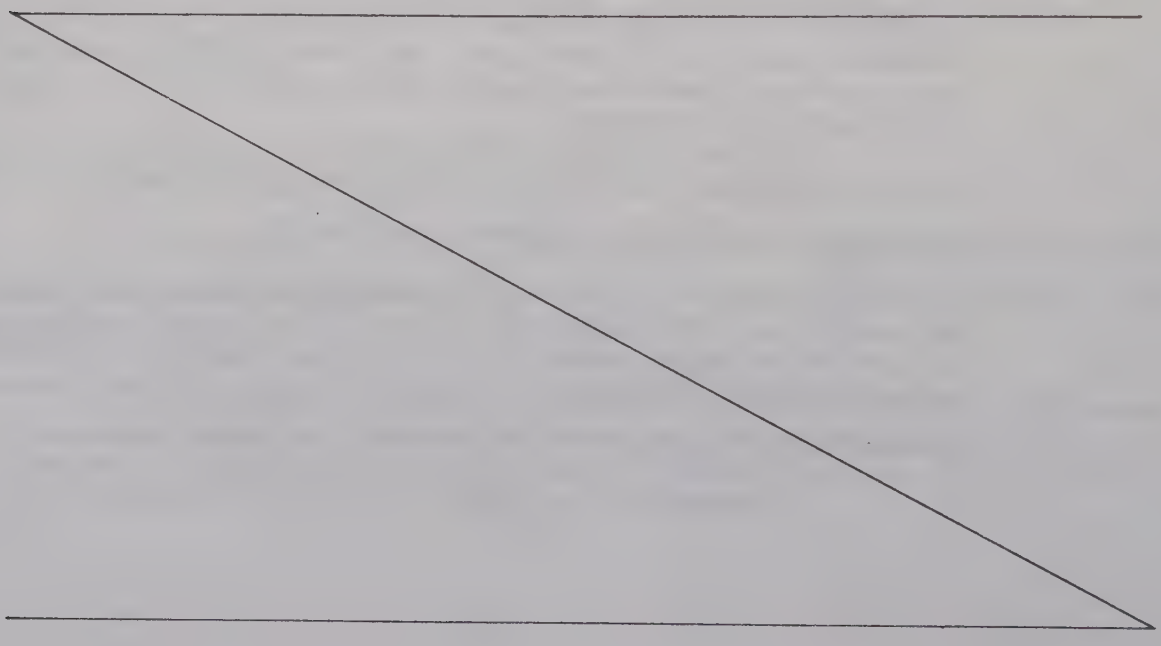
Il apparaît donc clairement qu'il faut choisir parmi des méthodes de résolution numérique, analogique ou hybride. Ces deux dernières méthodes sont exclues, d'une part à cause de la taille importante des calculateurs qu'elles nécessiteraient, et, d'autre part, à cause de l'orientation du travail vers une future étape d'identification, plus compatible avec des méthodes purement numériques.

Le système (11)(12)(13) a donc été résolu numériquement sur ordinateurs CII 10070 et UNIVAC 1130.

4.3.2. - Résolution numérique du système d'équation régissant l'écoulement -

La procédure de résolution s'inspire de récents travaux ayant porté sur l'approximation numérique de la solution du système tridimensionnel de Navier-Stokes (référence [22]) ou sur l'écoulement sanguin dans les conduits viscoélastiques artériels (références [24] , [27]). Cependant, le problème qui fait l'objet de cette étude, est bien particulier. En effet, outre le caractère non périodique et non stationnaire de l'écoulement, le terme quadratique de (12) ne peut être négligé (or c'est une hypothèse simplificatrice souvent adoptée), et, de plus, (13) traduit le mouvement de S entre deux sections S_{max} et S_{min} très différentes l'une de l'autre ($S_{min} \simeq 10\%$ à $20\% \times S_{max}$) (et non pas l'oscillation de faible amplitude de S autour d'une valeur moyenne). Ces difficultés ont finalement conduit à adopter une procédure explicite aux différences finies (exposée au paragraphe b)), certes moins précise ($0(\Delta X)$ et $0(\Delta T)$) que des méthodes plus sophistiquées, mais dont le critère de stabilité peut être évalué. Elle présente de plus l'intérêt d'être relativement facile à mettre en oeuvre et assez économique en temps de calcul.

(En annexe, sont définis les termes classiquement employés (convergence, stabilité, consistence) lors de l'approximation de la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles par une méthode numérique).



a) Stabilité

L'analyse de la convergence ou de la stabilité d'une procédure se fait habituellement en utilisant des développements en série de Taylor. Cependant, dans la pratique, il est rarement possible de mener à bien de tels calculs, très vite inextricables, surtout dans les cas non linéaires. Il convient, par conséquent, de développer des critères qui, sans prétendre à la rigueur mathématique, permettent d'estimer la stabilité d'une procédure, même dans le cas où, pour des raisons purement technologiques (taille d'un calculateur, simplicité de mise en oeuvre), les pas de calcul doivent être maintenus à des valeurs élevées.

Des critères approximatifs de stabilité ont ainsi été déterminés en utilisant diverses simplifications du système :

- en négligeant le terme de frottement, la condition de stabilité s'écrit (référence [26]) :

$$\left(|v|+c\right)\frac{\Delta T}{\Delta X} \leqslant 1$$

c : vitesse locale du son
v : vitesse d'écoulement du fluide

on démontre que dans le cas d'un écoulement lent, cette condition demeure valable même en présence d'un terme de frottement.

- en linéarisant (11) 12) et en écrivant (13) sous la forme :

$$S(x,P) = S_o(x) + (P-P_o)\,C_u(x) \quad - \left(C_u = \frac{\partial S}{\partial P}\Big|_x\right)$$

(11)(12) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} + C_u(x)\dfrac{\partial P}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} + L_u(x)\dfrac{\partial Q}{\partial t} = -8\pi\mu\dfrac{Q}{S_o^2}\times 2^i \end{cases}$$

avec $L_u(x) = \dfrac{\rho}{S_o}$

et sous réserve que : $|P-P_o|\,C_u(x) \leqslant S_o(x)$

la condition de stabilité s'écrit alors :

$$\frac{\Delta T}{\Delta X} \leqslant \sqrt{L_u C_u}$$

L'hypothèse de linéarisation conduit donc à un critère de stabilité concernant (11)(12) de la forme :

$$\frac{\Delta T}{\Delta X} \leqslant \sqrt{\frac{\rho}{S}}\sqrt{\frac{\partial S}{\partial P}}$$

L'importance de la relation $f(S,PTM)=0$, qui détermine $\frac{\partial S}{\partial P}$, vis-à-vis de la stabilité de la procédure, apparait ici.

- en utilisant une extension de la méthode de Von Neumann (référence [4]) au cas d'un système d'équations non linéaires, et en transformant (11)(12) grâce à la variable $v = \frac{\dot{V}}{S}$ on obtient un coefficient d'amplification de module inférieur à 1 sous réserve que :

$$\frac{\Delta T}{\Delta X} \leqslant \frac{1}{v}$$

Il est assez satisfaisant que les trois critères obtenus au prix d'hypothèses simplificatrices diverses soient de formes semblables. Il faut remarquer qu'ils font apparaître des quantités, v ou $\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial P}$, qui dépendent du temps et de la variable spatiale, ce qui laisse supposer qu'une résolution optimale consisterait à utiliser des pas de calculs variables d'un instant à l'autre, ainsi que d'un α à l'autre, à T donné. L'indétermination de la fonction $f(S,PTM)=0$ ne permet pas d'utiliser pratiquement le second critère.

Pour un pas ΔX de l'ordre de 5 mm,

le premier critère fournit (environ) $\Delta T \leqslant 1,5\ 10^{-5}$ S

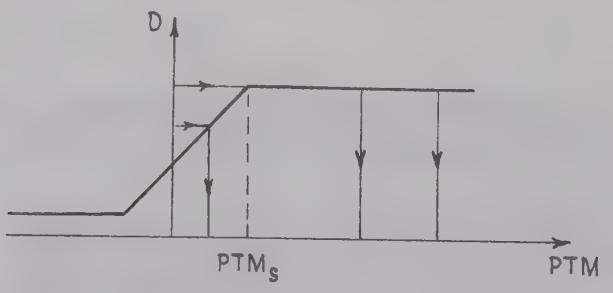
le dernier : $\Delta T \leqslant 2,5\ 10^{-4}$ S .

C'est finalement numériquement et à l'aide de ces critères approximatifs, soit trop rigoureux, soit trop souples, que la liaison à respecter entre les pas de calcul a été appréciée : ΔX étant choisi, ΔT a été diminué jusqu'à ce que la procédure s'avère stable (voir au chapitre V les résultats de la simulation).

Précision de la méthode : $0(\Delta X)$ et $0(\Delta T)$

b) Procédure et schéma de résolution

L'existence d'un seuil de réaction PTM_S d'une bronche vis-à-vis de l'application d'une pression transmurale, tel que l'étude bibliographique le laisse apparaître, impose de distinguer plusieurs phases de comportements bronchiques auxquelles correspondent des procédures de résolutions différentes.



En effet, pour $PTM > PTM_S$, la relation section-pression transmurale n'est pas bijective. (La connaissance de S_N^T ne permet par conséquent pas de déduire PTM_N^T).

Il faut noter, d'autre part, que si les sections bronchiques possèdent le même seuil de réaction PTM_S , leurs débuts de mouvement ne sont pas simultanés (figure 4.5).

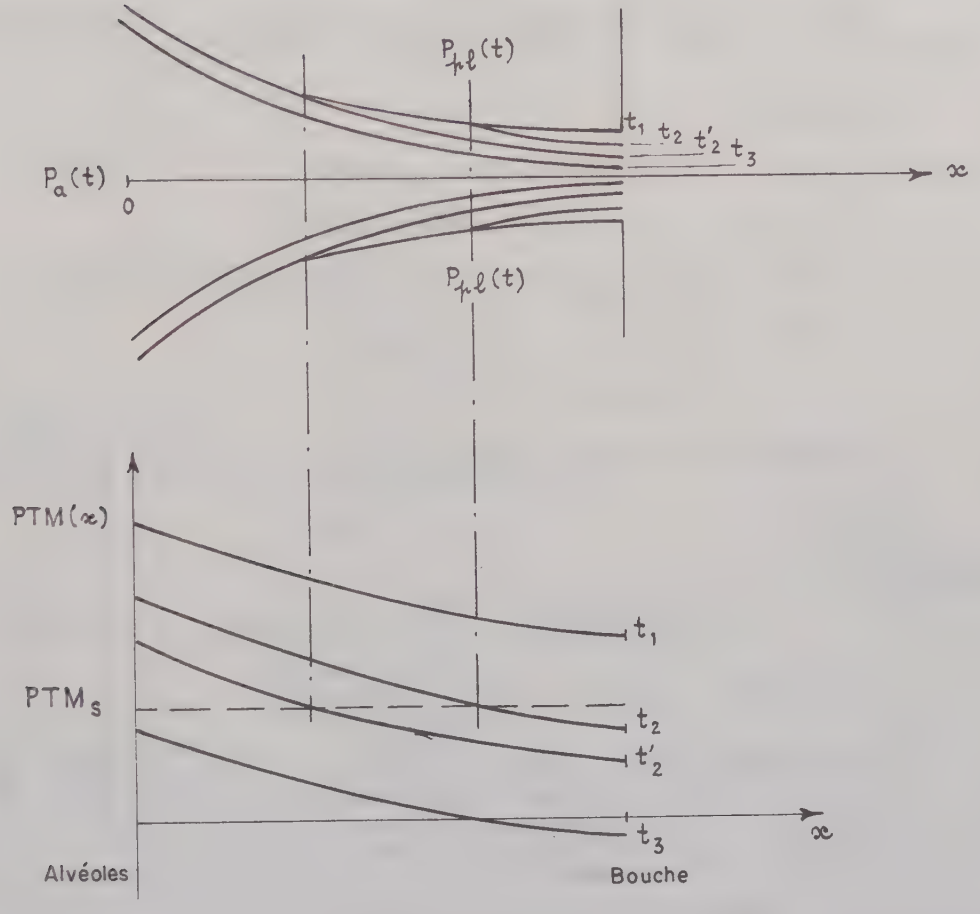


Figure 4.5

Au début de l'expiration, les pressions internes décroissent des alvéoles ($P \# P_a$) à la bouche ($P \# P_o$) , de telle sorte que les pressions transmurales $PTM = P - P_{pl}$, la pression pleurale étant équirépartie, décroissent également des alvéoles à la bouche.

Il convient donc de distinguer trois phases (figure 4.5).

phase 1 : aucune section bronchique ne bouge (exemple : instant t_1)

phase 2 : certaines sections sont en mouvement, d'autres immobiles (ex : t_2 , t_2')

phase 3 : toutes les sections sont en mouvement (ex : t_3)

Une description détaillée des procédures de résolution et de la distinction entre les diverses phases lorsque $P_a(t)$ est connue est ici donnée. Dans le cas où $\dot{V}_b(t)$ est connu, les distinctions entre phases étant semblables, seules les équations discrètes sont fournies.

Les résultats sont explicités au chapitre V, où sera également exposée la façon de déterminer l'état initial ($S(\alpha,0) = S_{max}(\alpha)\ (\forall\alpha)$) du tuyau.

Notations :

$\alpha = X_o$ à la hauteur des alvéoles

$\alpha = X_f$ " " de la bouche

N_g est l'indice de la génération dans laquelle l'équation est écrite

$S_N^i = S(N\Delta X, i\Delta T)$ etc....

N varie de 0 à N_f

La figure (4.6) est un organigramme simplifié de résolution.

PHASE 1

Par hypothèse : $\frac{\partial S}{\partial t} = 0\ (\forall\alpha)$ soit $S = S(\alpha)$.

(11) donne : $\frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$ soit $Q = Q(t)$

(12) devient alors $\frac{dQ}{dt} - \frac{Q^2}{S^2}\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{S}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \alpha} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{Q}{S} \times 2^i$

et (13) : $S_i = S_{i\,max}\ (\forall i)$.

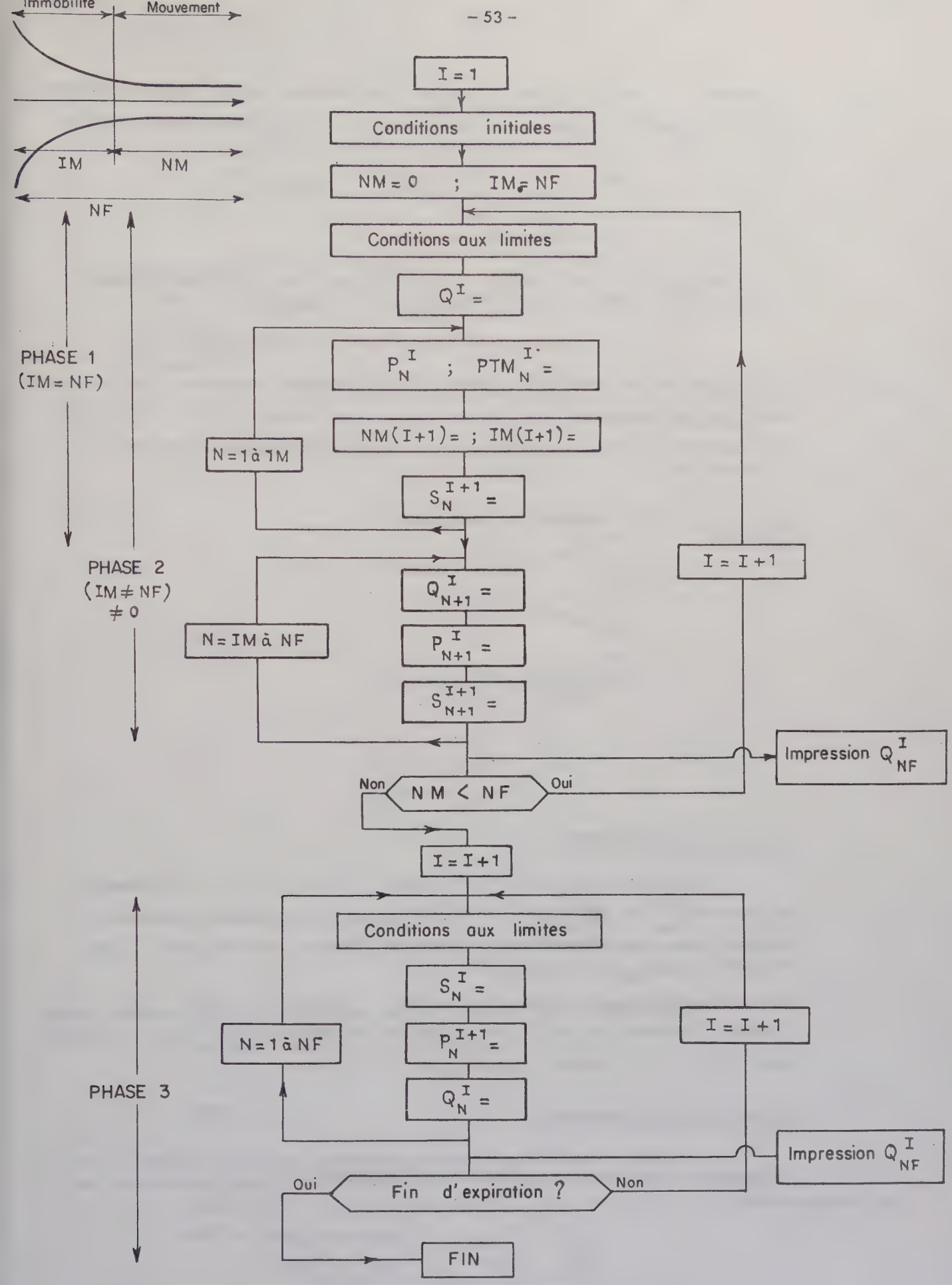
Comme $P_{X_o}(t) - P_{X_f}(t)$ est connue, il convient d'intégrer :

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = -\frac{\rho}{S}\frac{dQ}{dt} + \rho\frac{Q^2}{S^3}\frac{dS}{d\alpha} - \frac{8\pi\mu}{S^2}\ Q \times 2^i$$

ce qui donne :

$$P_{X_f}(t) - P_{X_o}(t) = -\rho\frac{dQ}{dt}\int_{X_o}^{X_f}\frac{d\alpha}{S(\alpha)} + \rho Q^2\left[\frac{1}{2S^2(X_o)} - \frac{1}{2S^2(X_f)}\right] - 8\pi\mu Q\int_{X_o}^{X_f}\frac{2^{N_g}}{S^2(\alpha)}\,d\alpha$$

les coefficients $A = \int_{X_o}^{X_f}\frac{d\alpha}{S(\alpha)}$, $C = \int_{X_o}^{X_f}\frac{d\alpha}{S^2(\alpha)} \times 2^{N_g}$ sont obtenus par méthode d'intégration numérique classique de fonction tabulée.



I : Indice de temps
N : " d'abscisse
NM(I+1) Valeur de NM à t = I + 1
IM(I+1) " IM "

Figure 4.6

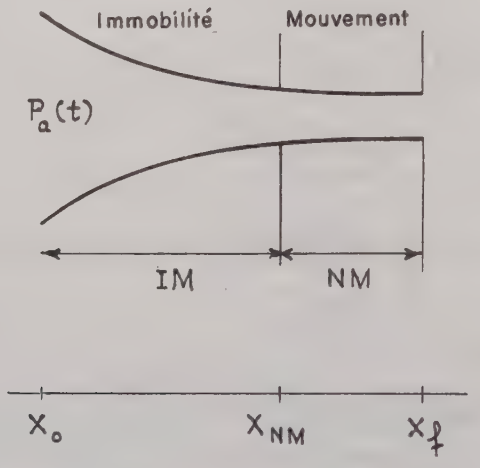
En posant $B = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{S^2(X_o)} - \frac{1}{S^2(X_\ell)}\right]$, on trouve, après "discrétisation", le débit cherché ainsi que les pressions internes par les formules :

$$(15)\quad i \geq 2 : \quad Q^i = Q^{i-1} + \frac{\Delta T}{\rho A}\left[P^i_{X_o} - P^i_{X_\ell} + \rho B (Q^{i-1})^2 - 8\pi\mu C Q^{i-1}\right]$$

$$(16)\quad 1 \leq N \leq N_\ell - 1 : \quad P^i_{N+1} = P^i_N + \Delta X\left[-\frac{\rho}{S_{N\,max}}\frac{Q^i - Q^{i-1}}{\Delta T} + \rho\frac{(Q^{i-1})^2}{(S_{N\,max})^3}\frac{S_{N+1\,max} - S_{N\,max}}{\Delta X} - 8\pi\mu \times \frac{2^{N_g} Q^{i-1}}{(S_{N\,max})^2}\right]$$

Le calcul des P^i_N permet de déterminer le nombre NM de sections en mouvement à l'instant $i+1$ en testant $PTM^i_N = P^i_N - P_{hl}(i)$ par rapport à PTM_S . Si $NM \neq 0$, on est alors dans la phase 2 à l'instant $i+1$.

PHASE 2



$IM = N_\ell - NM$

IM sections immobiles :

La pression d'entrée est connue : c'est $P_a(t)$. La pression de sortie $P_{X_{NM}}(t)$ est inconnue. Nous ferons l'hypothèse consistant à adopter pour cette pression la pression interne, connue grâce à (16), régnant en $x = X_{NM}$ à l'instant $t-1$.

Nous sommes donc ramenés au cas précédent, ce qui permet, sous réserve d'obtenir A et C par intégration entre X_o et X_{NM}, d'appliquer (15) et (16) avec $X_\ell = X_{NM}$.

NM sections en mouvement :

Le débit d'entrée est connu grâce aux calculs concernant les IM sections immobiles. (11) et (12) sont alors discrétisées sous la forme :

$$\frac{Q^{i+1}_{N+1} - Q^{i+1}_N}{\Delta X} = -\frac{S^{i+1}_{N+1} - S^i_{N+1}}{\Delta T}$$

$$\frac{Q_N^{i+1} - Q_N^i}{\Delta T} - 2\frac{Q_N^{i+1}}{S_N^i}\frac{S_N^{i+1} - S_N^i}{\Delta T} - \frac{(Q_N^{i+1})^2}{(S_N^i)^2}\frac{S_{N+1}^i - S_N^i}{\Delta X} =$$

$$-\frac{S_N^i}{\rho}\frac{P_{N+1}^{i+1} - P_N^{i+1}}{\Delta X} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{Q_N^{i+1}}{S_N^i} \times 2^{N_g} .$$

L'équation (13) est utilisée sous la forme : $P_N^i \; nD \; S_N^{i+1}$,

ce qui conduit finalement au système :

PHASE 2 - Equations concernant les sections en mouvement (figure 4.7)

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{N+1}^i &= Q_N^i - \frac{\Delta X}{\Delta T}\left(S_{N+1}^i - S_{N+1}^{i-1}\right) \\ P_{N+1}^i &= P_N^i - \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \\ P_N^i \; &nD \; S_N^{i+1} \end{aligned}}$$

avec :

$$\begin{cases} \psi_1 = -\rho\frac{\Delta X}{\Delta T}\frac{Q_N^i - Q_N^{i-1}}{S_N^{i-1}} \\ \psi_2 = 2\rho\frac{\Delta X}{\Delta T}\frac{Q_N^i}{(S_N^{i-1})^2}\left(S_N^i - S_N^{i-1}\right) \\ \psi_3 = \rho\frac{(Q_N^i)^2}{(S_N^{i-1})^3}\left(S_{N+1}^{i-1} - S_N^{i-1}\right) \\ \psi_4 = -8\pi\mu\,\Delta X\frac{Q_N^i}{(S_N^{i-1})^2} \times 2^{N_g} \end{cases}$$

et le débit $Q_{N_f}^i$ est obtenu grâce à la connaissance de P_o

Lorsque $NM = N_f$, on atteint la phase 3.

PHASE 3

Les équations précédentes ne sont pas utilisables car les débits Q_1^i ne sont pas connus. (11) et (12) sont alors discrétisées de la façon suivante :

$$\frac{Q_N^i - Q_{N-1}^i}{\Delta X} = -\frac{S_N^{i+1} - S_N^i}{\Delta T}$$

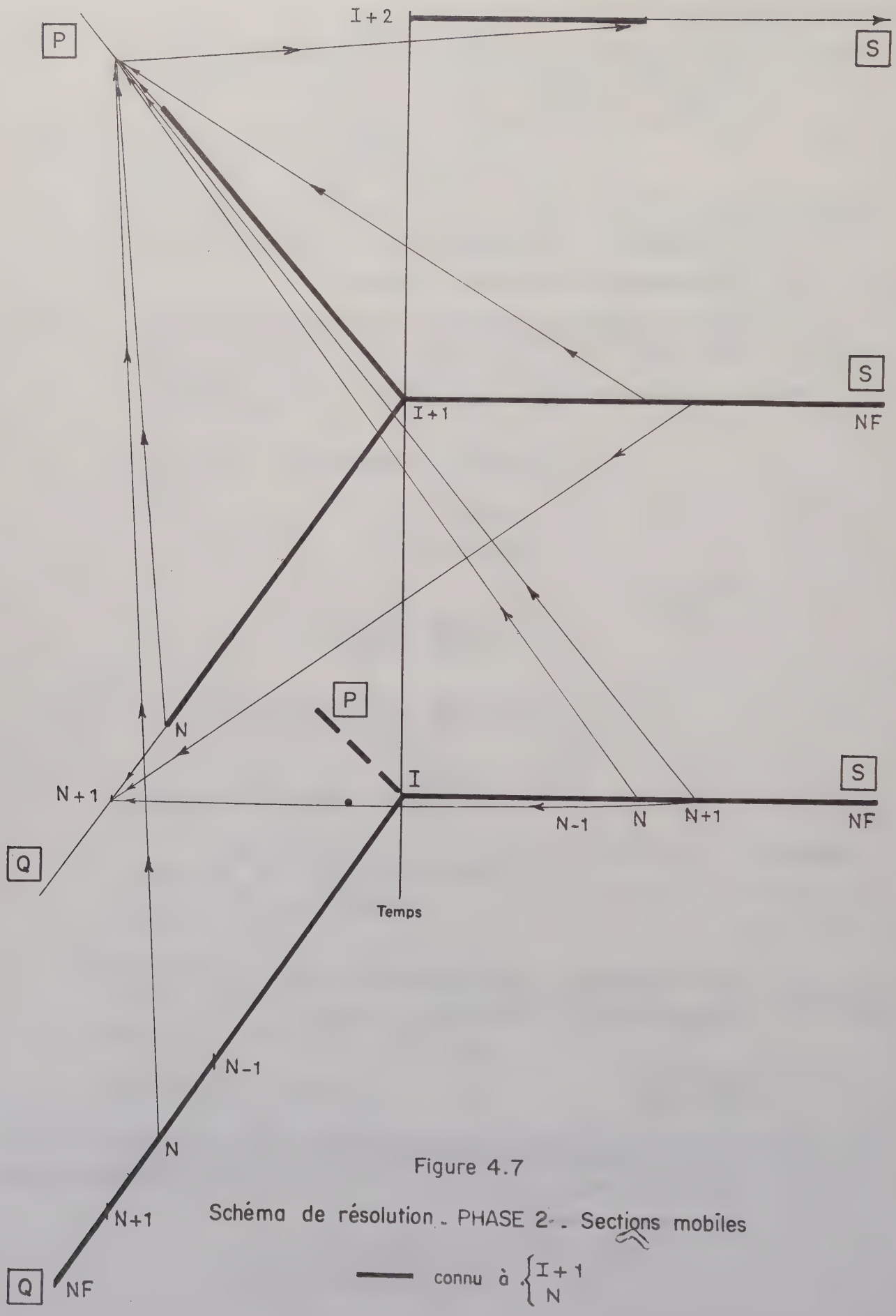


Figure 4.7

Schéma de résolution - PHASE 2 - Sections mobiles

connu à $\begin{cases} I+1 \\ N \end{cases}$

$$\frac{Q_N^{i+1} - Q_N^i}{\Delta T} - 2\frac{Q_N^{i+1}}{S_N^i}\frac{S_N^{i+1} - S_N^i}{\Delta T} - Q_N^{i+1}\frac{Q_N^i}{(S_N^i)^2}\frac{S_{N+1}^i - S_N^i}{\Delta X} =$$

$$-\frac{S_N^i}{\rho}\frac{P_{N+1}^{i+1} - P_N^{i+1}}{\Delta X} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{Q_N^{i+1}}{S_N^i} \times 2^{Ng}.$$

(13) est utilisée sous la forme $S_N^i \rightsquigarrow P_N^{i+1}$ (qui ne prête pas à indétermination puisque $PTM(\alpha) < PTM_S$ pour toutes valeurs de α).

Le système régissant la phase 3 est alors :

PHASE 3

$$S_N^{i+1} = S_N^i - \frac{\Delta T}{\Delta X}\left(Q_N^i - Q_{N-1}^i\right) \qquad (2 \leq N \leq N_f)$$

$$Q_N^{i+1} = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4} \qquad (1 \leq N \leq N_f - 1)$$

$$S_N^i \rightsquigarrow P_N^{i+1}$$

avec :

$$\varphi_1 = Q_N^i - \frac{S_N^i}{\rho}\frac{P_{N+1}^{i+1} - P_N^{i+1}}{\Delta X}\Delta T$$

$$\varphi_2 = \frac{2}{S_N^i}\left(S_N^{i+1} - S_N^i\right)$$

$$\varphi_3 = \frac{\Delta T}{\Delta X}\frac{Q_N^i}{(S_N^i)^2}\left(S_{N+1}^i - S_N^i\right)$$

$$\varphi_4 = -\frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\Delta T}{S_N^i} \times 2^{Ng}$$

Remarques :

(1) Les phases 1 et 2 ne sont autres que des phases de détermination des conditions initiales (débits internes, pressions internes, sections...) d'un écoulement régi par les équations très générales de la phase 3.

(2) La relation (13) n'a volontairement pas été explicitée sous forme discrète : la procédure de résolution étant valable aussi bien pour une relation "statique" du type $D = \alpha P$ que pour une relation faisant intervenir des dérivées partielles par rapport au temps.

(3) Les équations de la phase 3 sont inapplicables au cas des NM sections qui commencent à bouger à l'instant $i+1$ (phase 2), car à l'instant précédent i, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ et donc $Q_N^i = Q_{N-1}^i$.

(4) Les équations ayant trait aux différentes phases concernent, par exemple pour les phases 1 et 2, une discrétisation de Q^2 sous la forme : $(Q_N^i)^2$. En réalité, des variantes se sont avérées plus efficaces vis-à-vis de la convergence de la procédure, en particulier :

Q^2 sous la forme : $Q_N^i \; Q_N^{i-1}$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\theta\left(u_{N+1}^{i+1} - u_{N-1}^{i+1}\right) + (1-\theta)\left(u_{N+1}^{i} - u_{N-1}^{i}\right)}{2\Delta X}$$

avec θ optimal $\# 0.51$.

Dans le cas où le débit $\dot{V}_b(t)$ est connu : l'indiciation est inversée (X_{ℓ} est affecté aux alvéoles) et (11)(12) est discrétisé sous la forme :

$$\frac{Q_{N+1}^i - Q_N^i}{\Delta X} = -\frac{S_N^{i+1} - S_N^i}{\Delta T} \qquad 1 \leq N \leq N_{\ell}-1$$

$$\frac{Q_N^{i+1} - Q_N^i}{\Delta T} + 2\,\frac{Q_N^i}{S_N^i}\,\frac{Q_N^{i+1} - Q_{N-1}^{i+1}}{\Delta X} - \frac{Q_N^{i+1}\,Q_N^i}{S_N^i\,S_N^{i+1}}\,\frac{S_N^i - S_{N-1}^i}{\Delta X} =$$

$$-\frac{S_N^i}{\rho}\,\frac{P_N^{i+1} - P_{N-1}^{i+1}}{\Delta X} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\,\frac{Q_N^{i+1}}{S_N^i} \times 2^{N_{\ell}} \qquad (2 \leq N \leq N_{\ell})$$

avec (13) : $S_N^i \; nD \; P_N^i$

conduisant à :

$\dot{V}_b(t)$ connu :

$$S_N^{i+1} = S_N^i - \frac{\Delta T}{\Delta X}\left(Q_{N+1}^i - Q_N^i\right)$$

$$Q_N^{i+1} = \frac{Q_N^i + \xi_1 + \xi_2}{1 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5}$$

$$S_N^i \; nD \; P_N^{i+1}$$

avec :

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{2\Delta T}{\Delta X} \quad \dfrac{Q_N^i \; Q_{N-1}^{i+1}}{S_N^i} \\ \xi_2 = -\dfrac{\Delta T}{\rho} \; S_N^i \; \dfrac{P_N^{i+1} - P_{N-1}^{i+1}}{\Delta X} \\ \xi_3 = 2\,\dfrac{\Delta T}{\Delta X} \quad \dfrac{Q_N^i}{S_N^i} \\ \xi_4 = -\,\Delta T \; \dfrac{Q_N^i}{S_N^i \; S_N^{i+1}} \quad \dfrac{S_N^i - S_{N-1}^i}{\Delta X} \\ \xi_5 = \dfrac{8\pi\mu}{\rho} \quad \dfrac{\Delta T}{S_N^i} \times 2^{N_g} \end{cases}$$

Chapitre 5

SIMULATION ET RESULTATS

5.1. - MISE EN OEUVRE -

5.1.1. - Schéma général de simulation -

L'estimation de la pression alvéolaire reposant sur l'hypothèse d'applicabilité, au cours d'une expiration forcée, de la relation $\Delta P_L = f(V)$ déterminée au cours d'une expérience statique préliminaire, il a paru préférable au stade de la simulation de ne pas exploiter $P_a(t)$ quantitativement. Le débit buccal $\dot{V}_b(t)$, connu avec une meilleure précision que $P_a(t)$, a donc initialement été choisi comme entrée du modèle, P_a comme sortie : $\dot{V}_b$ est ainsi exploité quantitativement tandis que ${}^{o}P_a$ est qualitativement comparée à la pression alvéolaire du modèle ${}^{m}P_a$. La figure 5.1. représente dans ce cas le schéma général de modélisation.

La simulation consiste à déterminer la pression alvéolaire ${}^{m}P_a(t)$ du modèle lorsque $\dot{V}_b(t)$ et $P_{pl}(t)$ sont connus.

L'influence des divers paramètres du système est testée en observant l'écart :

$$\varepsilon(t) = {}^{o}P_a(t) - {}^{m}P_a(t)$$

entre les comportements de l'objet et du modèle respectivement.

La simulation a d'autre part été logiquement entreprise à partir de données concernant un sujet sain.

5.1.2. - Equations réduites - Pas de calcul -

a) Equations réduites -

Dans le but d'étudier des grandeurs sensiblement comprises entre 0 et 1, les variables réduites suivantes ont été adoptées:

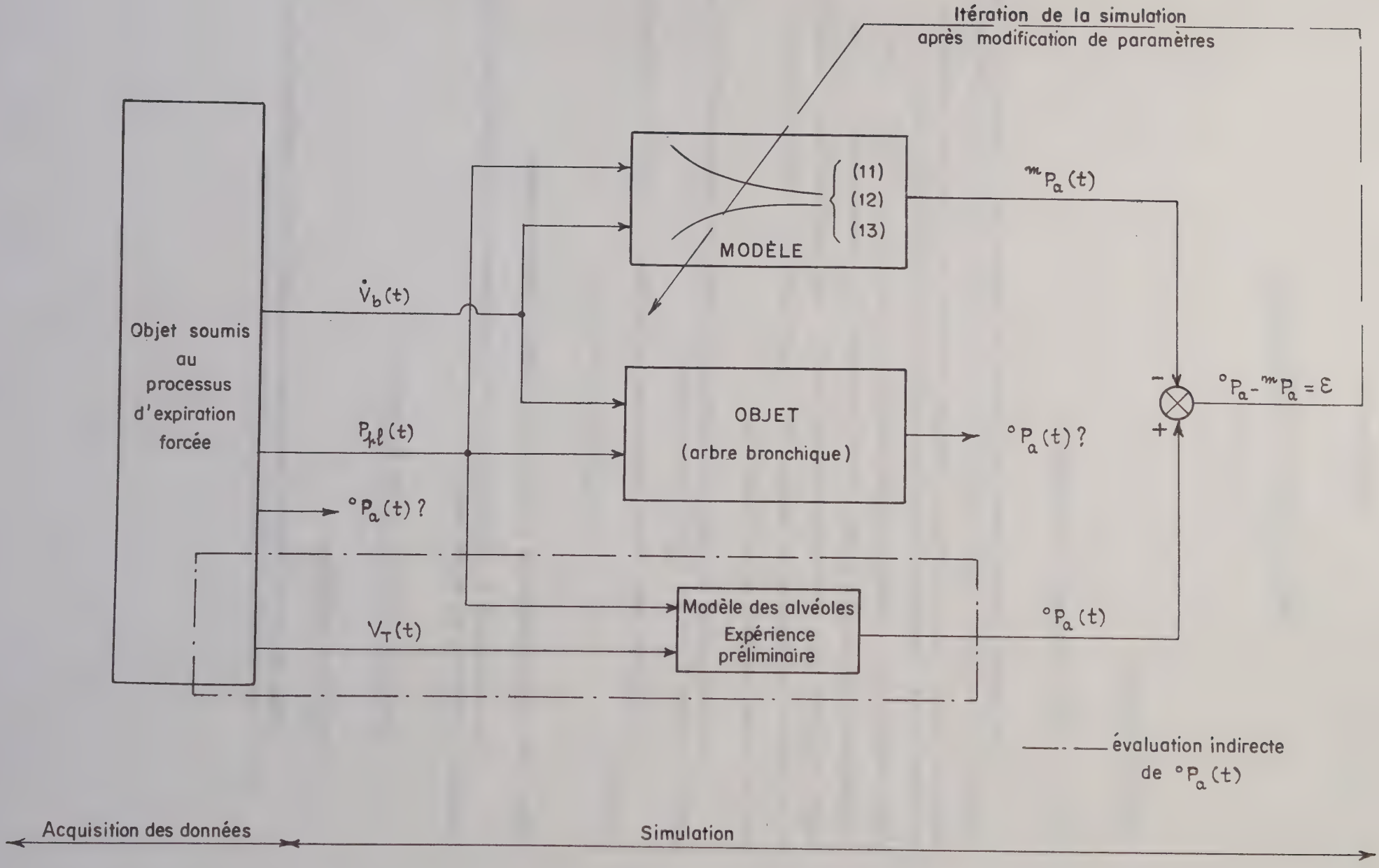


Figure 5.1

SCHEMA GENERAL DE MODELISATION

grandeur	notation	unité courante	grandeur réduite	unité de réduction
temps	t	s.	$t_r = \frac{t}{T_o}$	$T_o = 2\,s$.
longueur	x	cm	$x_r = \frac{x}{L_o}$	$L_o = 10\,cm$
section	S	cm^2	$S_r = \frac{S}{S_o}$	$S_o = 10\,cm^2$
débit	Q	l/s	$Q_r = \frac{Q}{Q_o}$	$Q_o = 8/5\ l/s$.
pression	P	mb	$\frac{P_{absolue} - P_{atmosphérique}}{P_o}$	$P_o = 150\,mb$.

(5)

Le système (11)(12) s'écrit alors :

$$(15)\quad \frac{Q_o T_o}{L_o S_o}\,\frac{\partial Q_r}{\partial x_r} + \frac{\partial S_r}{\partial t_r} = 0$$

$$(16)\quad \frac{\partial Q_r}{\partial t_r} + \frac{Q_o T_o}{L_o S_o}\,\frac{\partial (Q_r^2/S_r)}{\partial x_r} = -\frac{S_o T_o P_o}{Q_o L_o}\,\frac{S_r}{\rho}\,\frac{\partial P_r}{\partial x_r} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\,\frac{T_o}{S_o}\,2^i\,\frac{Q_r}{S_r}$$

avec : $\frac{Q_o T_o}{L_o S_o} = 32$ (quantité sans dimension)

$\rho = 1{,}29\ kg/m^3$

$\mu = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ Pl$

$\left.\begin{aligned} &\frac{S_o T_o P_o}{Q_o L_o} = 1{,}45 \cdot 10^5 \\ &\frac{8\pi\mu}{\rho}\,\frac{T_o}{S_o} = 0{,}662 \end{aligned}\right\}$ (quantités sans dimension)

Une simulation préliminaire a consisté, compte tenu de : $\frac{Q_o T_o}{L_o S_o} = 32$, à écrire (15) sous la forme : $\frac{\partial Q_r}{\partial x_r} \neq 0$, puis à négliger la quantité $\frac{Q_r}{S_r}\,\frac{\partial Q_r}{\partial x_r}$ par rapport à $\left(\frac{Q_r}{S_r}\right)^2 \frac{\partial S_r}{\partial x_r}$ dans le terme quadratique en Q_r de (16). (Les résultats correspondants sont présentés au paragraphe 5.3).

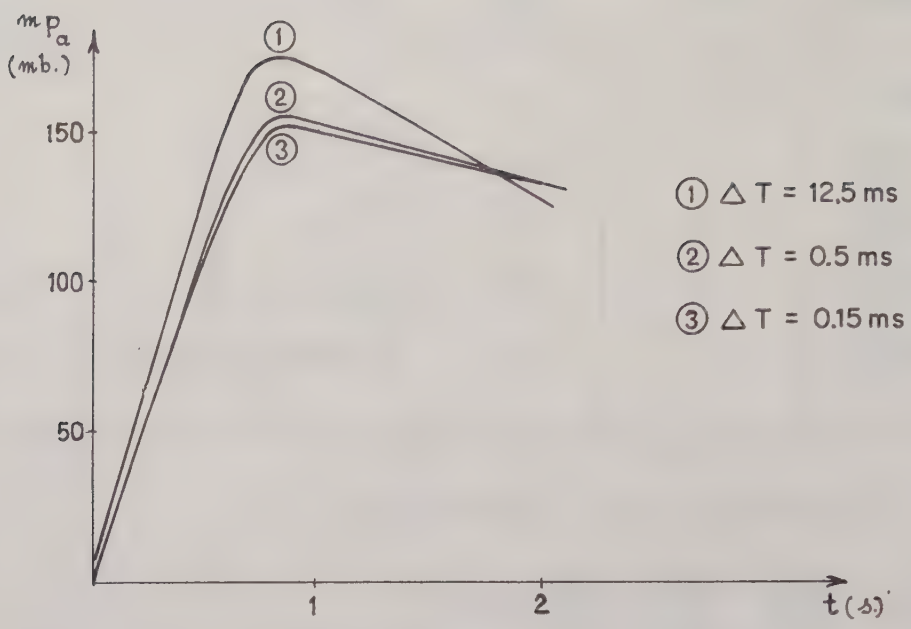
b) <u>pas de calcul</u> -

Les pas de calcul en abscisse suivants ont été choisis :

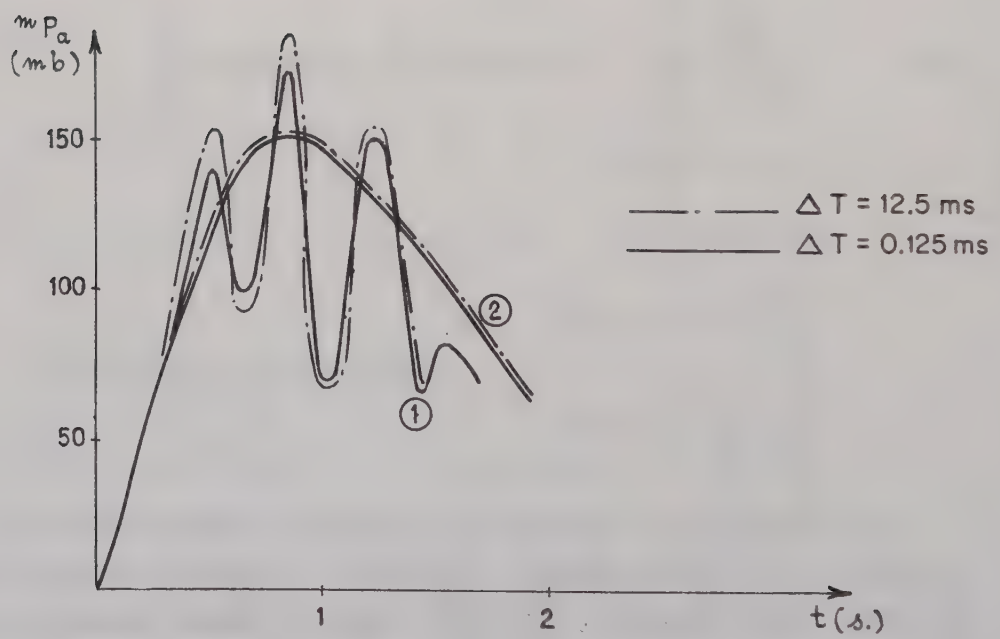
$\Delta X = 5\,mm$ pour les générations 0 à 2 (longueurs variant entre 12 et 1,9 cm : $\frac{\partial S}{\partial x}$ faible)

$\Delta X = 0{,}5\,mm$ pour les autres générations.

Un essai de pas ΔX deux fois plus faibles a conduit, pour un même



a) $\frac{\partial f}{\partial \Delta X}$ (S , P T M) = 0 } identiques



b) Relations $\frac{\partial f}{\partial \Delta X}$ (S P T M) = 0 correspondant à { ① une faible inertie ② une grande inertie

Figure 5.2

Influence des pas de calcul sur l'approximation numérique $m P_a$

ΔT assurant la stabilité, à des résultats s'écartant de 0,3 % des premiers, ce qui, compte tenu de l'aspect qualitatif de la comparaison objet - modèle, ainsi que des augmentations importantes de temps de calcul et taille de programme imposées par des pas de calcul très faibles, a paru satisfaisant.

Les pas de calcul en temps ont été approximés à l'aide des critères de stabilité exposés au chapitre IV, puis diminués successivement jusqu'à ce que la stabilité de la procédure soit observée.

La figure 5.2. a) représente les solutions numériques ${}^{m}P_a(t)$ du système (11)(12)(13) obtenus pour des pas de calcul ΔT différents, ΔX et $f(S,PTM)$ étant identiques. La stabilité de la procédure n'est pas assurée dans le cas ① .L'écart entre les pressions des cas ② et ③ étant de l'ordre de 1 %, $\Delta T = 0{,}5$ ms est suffisamment petit pour cet essai.

La figure 5.2. b) montre que la stabilité de la procédure d'approximation numérique est, comme le second critère le laissait prévoir, effectivement liée à la relation $f(S,PTM) = 0$. Pour $\Delta T = 1{,}25$ ms , la stabilité est assurée dans le cas d'une inertie importante ; elle ne l'est pas dans le cas d'une faible inertie bronchique. Pour chaque nouvel essai d'une relation $f(S,PTM)$, il a donc fallu, avant toute autre chose, entreprendre systématiquement la recherche des pas de calcul assurant la stabilité de la procédure numérique. Pratiquement, suivant les cas, ΔT a dû être choisi entre 0.1 ms et 12 ms, ce qui semble satisfaisant étant donnée la nature des entrées (figure 3.5).

L'expiration durant environ deux à trois secondes, un pas temporel de 0.1 ms nécessite $2\ 10^4$ à $3\ 10^4$ itérations sur T , alors que les boucles en x sont parcourues environ 500 fois ; pratiquement, par économie de temps de calcul, la solution numérique a rarement été calculée pour un temps t supérieur à 1,5 s.

5.1.3. - Conditions initiales -

L'instant initial de l'expiration est défini comme étant l'instant tel que :

$$\dot{V}_b(0) = 0$$

$$\dot{V}_b(0^+) = 0^+$$

C'est également l'instant où la pression alvéolaire s'annule pour devenir supérieure à la pression atmosphérique.

Il est nécessaire de déterminer l'état géométrique initial $(S_i^\circ , \forall i)$ du tuyau élastique.

- Au début de l'expiration, la pression alvéolaire est pratiquement nulle, de telle sorte que :

$$P_i^\circ \# 0 \ (\forall i)$$

La pression pleurale initiale est de l'ordre de - 30 à - 40 mb, ce qui fournit une évaluation des pressions transmurales initiales :

$$PTM_i^\circ \# 30\,mb \text{ à } 40\,mb \quad (\forall i).$$

Les courbes de la figure 4.2. $(D/D_{max} = f(PTM))$ indiquent alors que :

$$D_i^\circ = D_{i\,max}^\circ \quad (\forall i)$$

puisque le seuil de pression transmurale PTM_S est voisin de 5 à 10 mb.

- Les données géométriques de Weibel $(S_{iw}, \forall i)$ concernent des poumons gonflés à 75 % de leur capacité maximale. Il s'agit de relier $S_{i\,max}$ à S_{iw}.

La courbe $\Delta P_L = f(V)$ fournit ΔP_L (75 %) (pression d'élasticité alvéolaire lorsque $V = \frac{75}{100} \times V_m$). Pour le sujet considéré ($V_m \# 5.7\,\ell$ - figure 5.2) :

$$\Delta P_L (75\%) \# 13\,mb.$$

pression qui est supérieure au seuil PTM_S ; ceci laisse supposer qu au cours de l'expérience réalisée par E.R. Weibel, les bronches étaient soumises à des pressions transmurales supérieures à PTM_S , et donc (figure 4.2) qu'elles avaient atteint leur diamètre maximal. En effet, dans des conditions statiques, la pression alvéolaire peut être supposée uniformément répartie dans les bronches de telle sorte que :

$$PTM(x) = P(x) - P_{pl} = P_a - P_{pl} = \Delta P_L \quad (\forall x)$$

Ceci conduit donc à supposer que :

$$S_{iw} \# S_{i\,max} = S_i^\circ \quad (\forall i).$$

hypothèse dont la portée pourra être testée (§ 5.3).

5.2. - INFLUENCE DU COMPORTEMENT DES PAROIS BRONCHIQUES -

Le but de ce travail étant d'améliorer la connaissance du comportement des parois bronchiques afin de pouvoir en diagnostiquer les anomalies, l'étude, même qualitative, de l'influence de la relation $f(S, PTM) = 0$ sur la sortie du modèle est fondamentale. Diverses simulations correspondant à des équations d'état (notées " f " dans ce paragraphe) différentes ont été entreprises, les autres paramètres du système (dimensions géométriques, terme de frottement, glotte...) étant maintenus à des valeurs constantes et normales.

Dans un premier temps, les données expérimentales concernant f , fournies par la littérature (figure 4.2) ont été logiquement adoptées ; les résultats correspondants n'étant pas satisfaisants, d'autres essais de relations f ont ensuite été effectués.

5.2.1. - Utilisation des relations provenant de la littérature -

Les résultats obtenus en utilisant les courbes expérimentales (figures 5.3. c) et 4.2.) sont présentés en figure 5.3. a) et b). ${}^{m}P_a(t)$ est très différente de la pression alvéolaire théorique ${}^{\circ}P_a(t)$. Les parois du tube, dont l'inertie est supposée nulle dans ces conditions, oscillent très rapidement entre deux états correspondant aux sections minimales et maximales ($D_{min} \# 10\% \times D_{max}$). Une explication de ce phénomène a été proposée au chapitre IV (§ 4.2.2.) : lorsque (13) $f(S, PTM) = 0$ est la réelle équation d'état bronchique, la solution du système (11)(12) est la fonction ${}^{\circ}P_a(t)$; par contre, lorsque (13) suppose une inertie bronchique plus faible que l'inertie réelle, la solution de (11)(12) correspondant aux mêmes conditions aux limites $\dot{V}_b(t)$ et $P_{pl}(t)$ est oscillante.

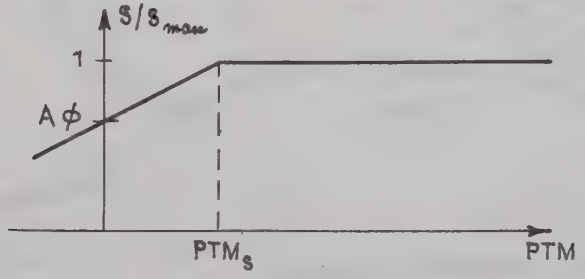
Ces résultats prouvent, comme il fallait s'y attendre, que le domaine de validité des relations expérimentales de la figure 4.2. ne s'étend pas aux processus qui, comme celui qui a été choisi, provoquent d'importantes variations dynamiques des pressions et débits. Il convient par conséquent de proposer d'autres formes pour la relation f.

5.2.2. - Autres formes de l'équation d'état -

La solution du système (11)(12) lorsque (13) traduit une inertie bronchique supérieure à l'inertie réelle n'étant pas oscillante, les essais successifs ont donc, dans un premier temps, consisté à supposer le tube trop raide puis à diminuer progressivement sa raideur.

a) relation linéaire section - pression transmurale :

Le coefficient d'une relation S/S_{max} - PTM linéaire pour $PTM < PTM_s$, a été diminué successivement de $A\phi = 1$ à $A\phi = 0.960$.



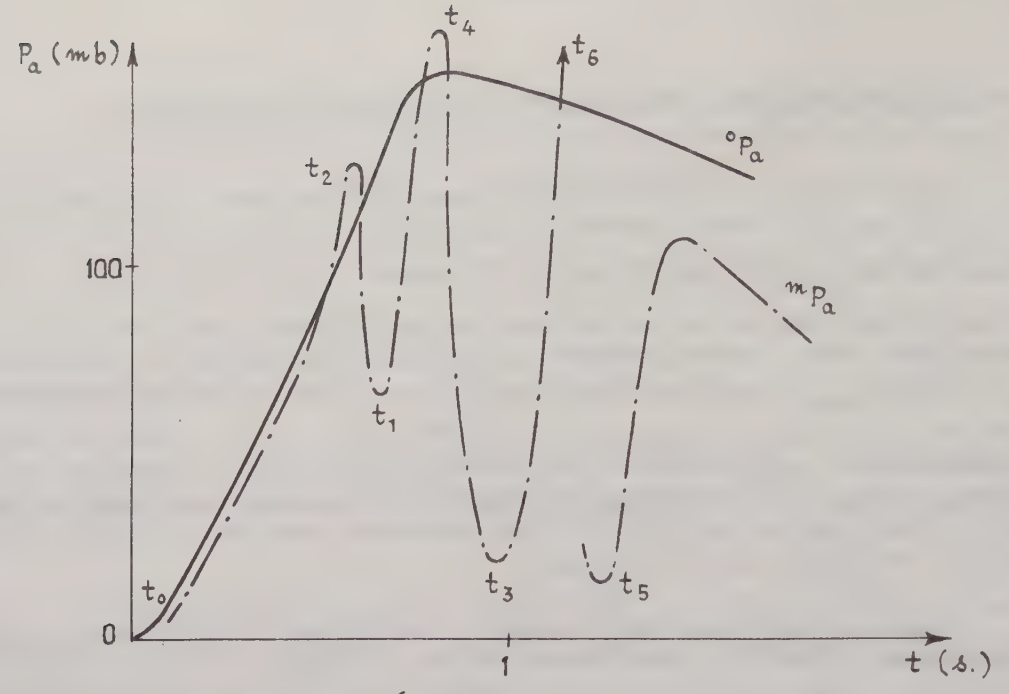
Le seuil $PTM_s \# 5 mb$ fourni par la littérature a été conservé.

- Le cas $\Delta\phi = 1$ correspond à un tuyau rigide :

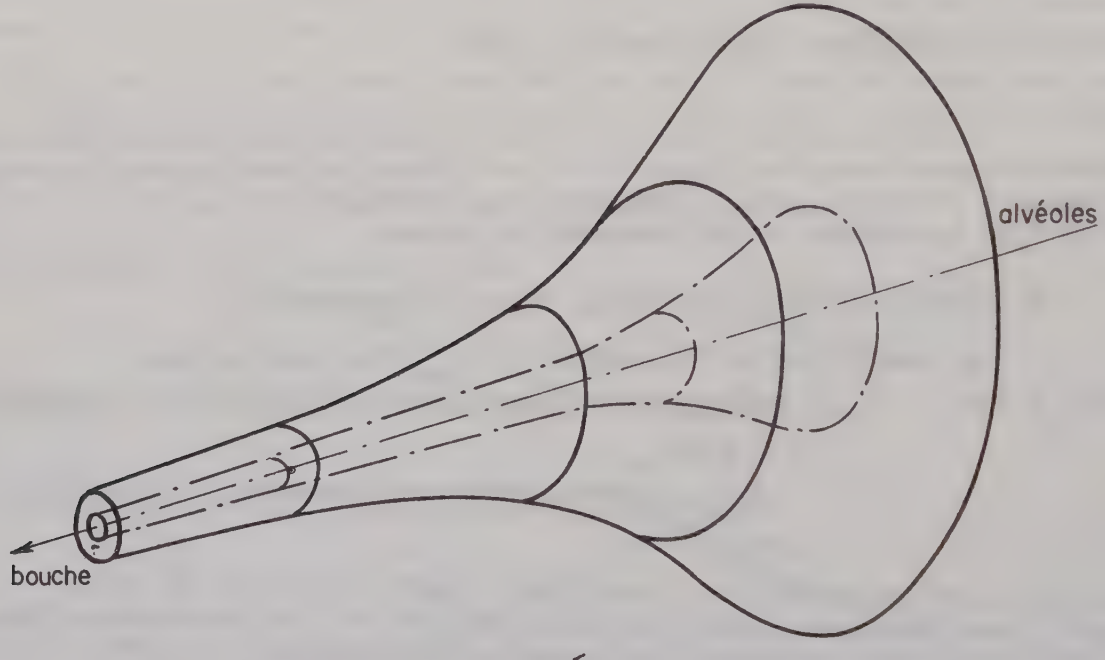
$$S_i^t = S_{i\,max}^t \quad (\forall t, \forall i).$$

la pression alvéolaire ainsi obtenue (courbe 1 figure 5.4), est très inférieure à la pression alvéolaire réelle.

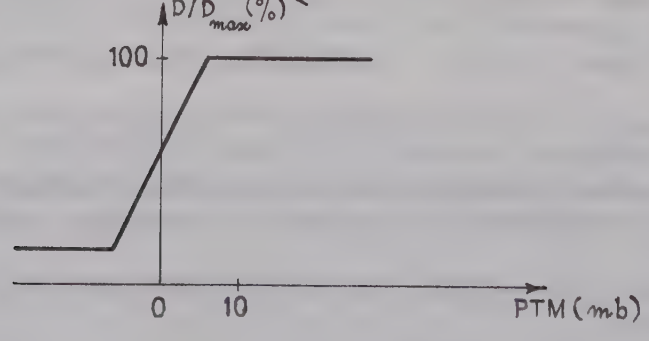
- Pour $A\phi = 0.960$, la solution est oscillante (courbe ④ , figure 5.4).



a) Pressions alvéolaires { $^{o}P_a$ théorique ; $^{m}P_a$ obtenu en simulation



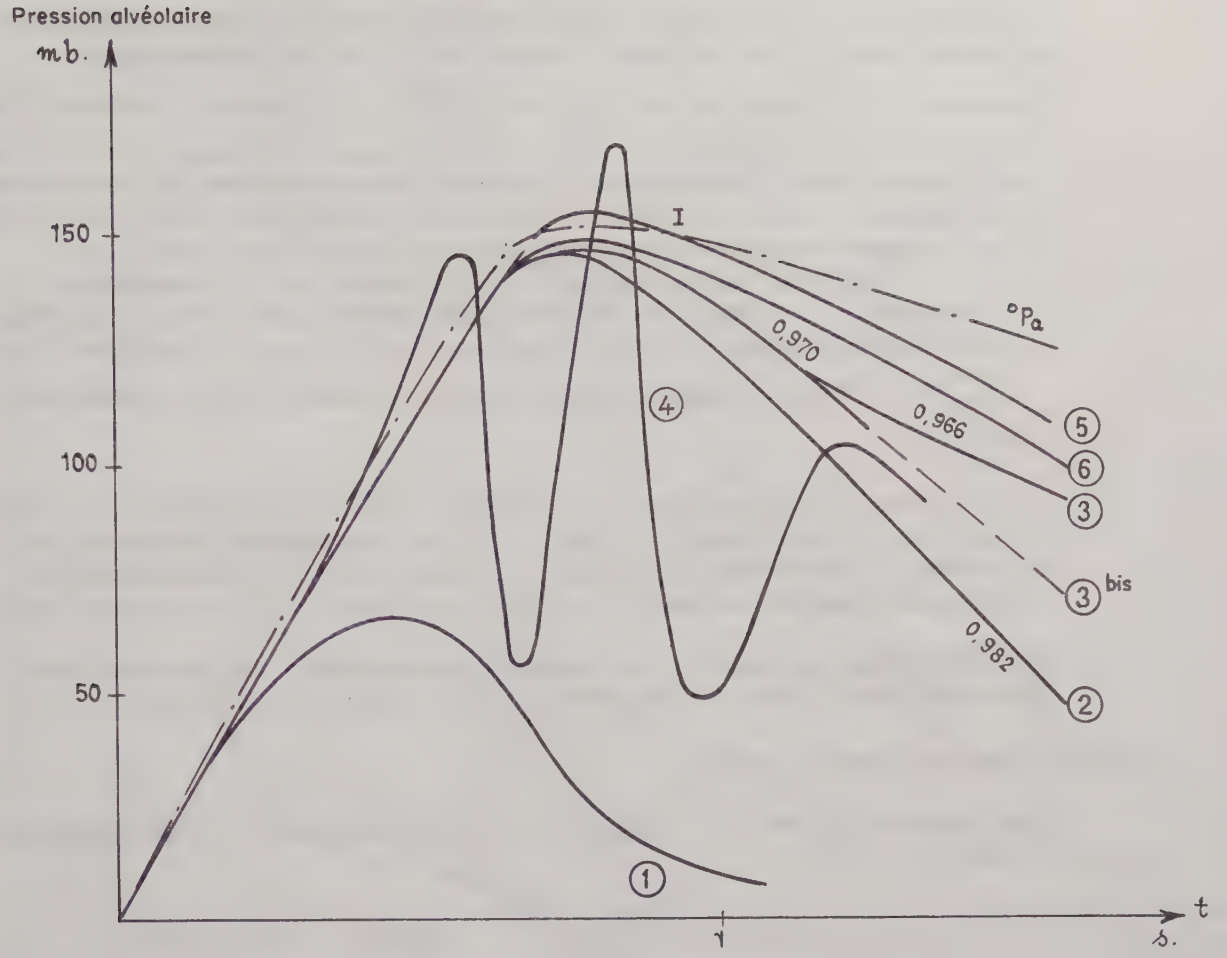
b) Evolution temporelle du tuyau { t_0, t_1, t_3, t_5 ; t_2, t_4, t_6



c) Courbes adoptées

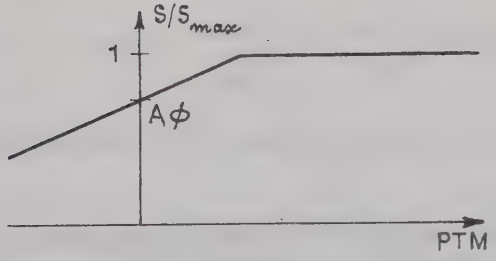
Figure 5.3

Résultats correspondants à la relation $\mathcal{F}$ fournie par la littérature



① $S = S_{max}\ (\forall t)$

② ③ et ④



⑤ et ⑥

$$S/S_{max} = \alpha\,PTM + \beta\,\frac{\partial PTM}{\partial t}$$

$\alpha = 0,980$

$\beta_1 = -0,7$ ⑤

$\beta_2 = -0,4$ ⑥

Figure 5.4

Modifications de la structure du modèle

- Le choix d'un coefficient $A\phi$ proche de la valeur 1 représente un moyen artificiel de tenir compte de l'inertie bronchique : (aucune dérivée partielle $\frac{\partial S}{\partial t}$ ou $\frac{\partial PTM}{\partial t}$ n'a jusqu'à présent été introduite dans la relation f). Il faut donc s'attendre à ce qu'un coefficient $A\phi$ satisfaisant lorsque les dynamiques de variations sont élevées, ne le soit pas dès que les phénomènes sont plus lents. C'est ce que prouve la courbe (2) obtenue pour $A\phi = 0.982$: pour $t < 1\,s$ environ un coefficient $A\phi$ proche de 1, traduisant l'existence d'un temps de réaction des parois vis-à-vis de l'application d'une pression transmurale, convient ; par contre pour $t > 1\,s$, $\frac{\partial PTM}{\partial t}$ étant de plus en plus faible, l'écart $\varepsilon(t)$ ne cesse de croître.

- La courbe (3) correspond à un coefficient $A\phi$ variable au cours de la simulation : pour $t > 1.25\,\delta$, $A\phi$ a été diminué de façon à favoriser l'écrasement du tuyau ; l'écart $\varepsilon(t)$ est effectivement réduit par rapport au cas : $A\phi = Cte = 0.970$ (courbe (3) en pointillés).

Ces résultats mettent en évidence la nécessité d'introduire des dérivées partielles par rapport au temps dans la relation f.

. b) <u>équation du premier ordre</u> :

Les courbes (5) et (6) (figure 5.4.) correspondent à une équation de la forme :

$$S = \alpha\, PTM + \beta \frac{\partial PTM}{\partial t} \qquad \text{pour} \qquad PTM < PTM_s .$$

pour une même valeur de α , et deux β différents.

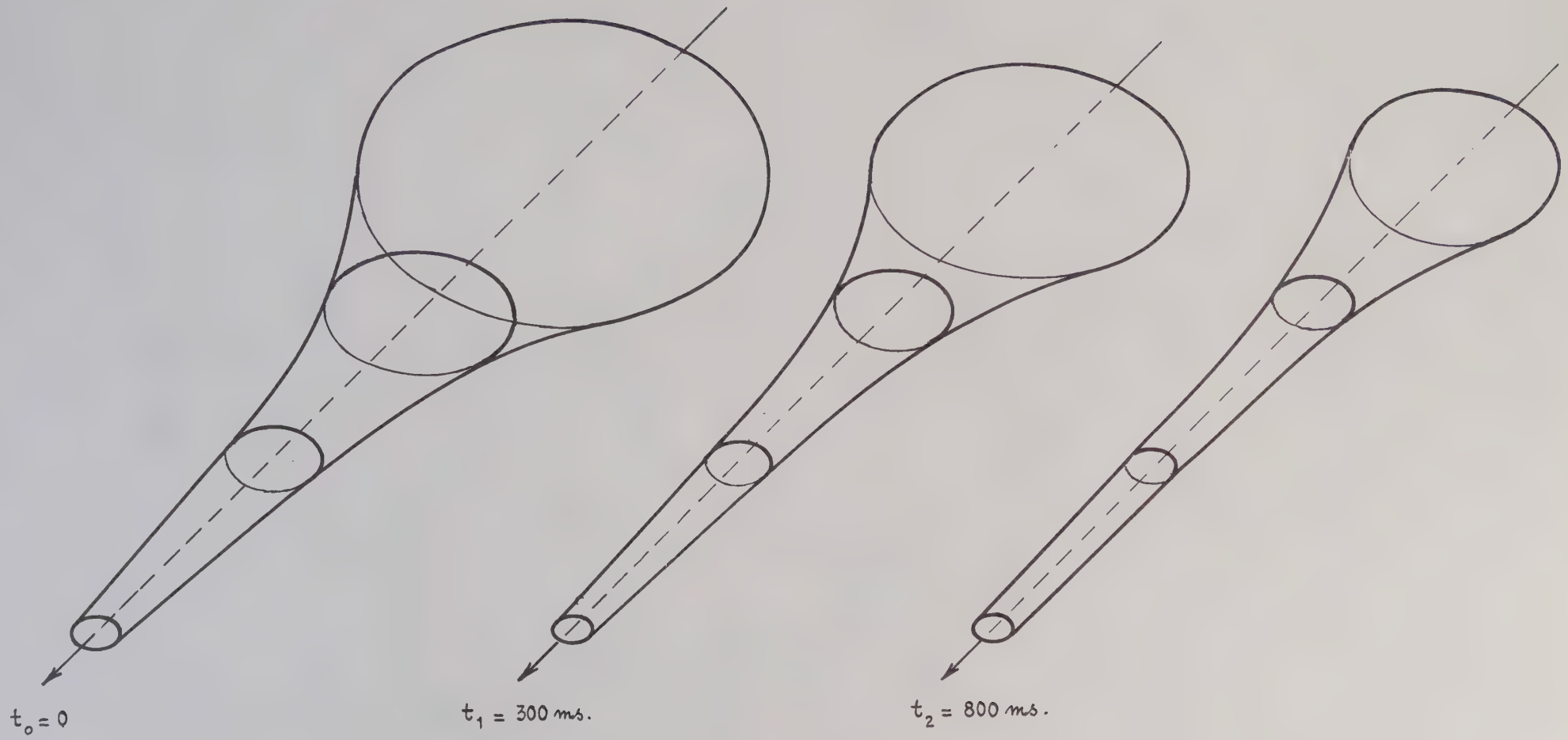
Au voisinage du point I d'intersection de ${}^{\circ}P_a(t)$ et de la courbe (6) $\frac{\partial PTM}{\partial t}$ change de sens de variation : ceci suggère une équation f de la forme :

$$S = \alpha\, PTM + \beta \frac{\partial PTM}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 PTM}{\partial t^2} \qquad \text{pour} \qquad PTM < PTM_s .$$

Mais il serait vain, à ce stade de test de la validité du modèle, de tenter de déterminer γ.

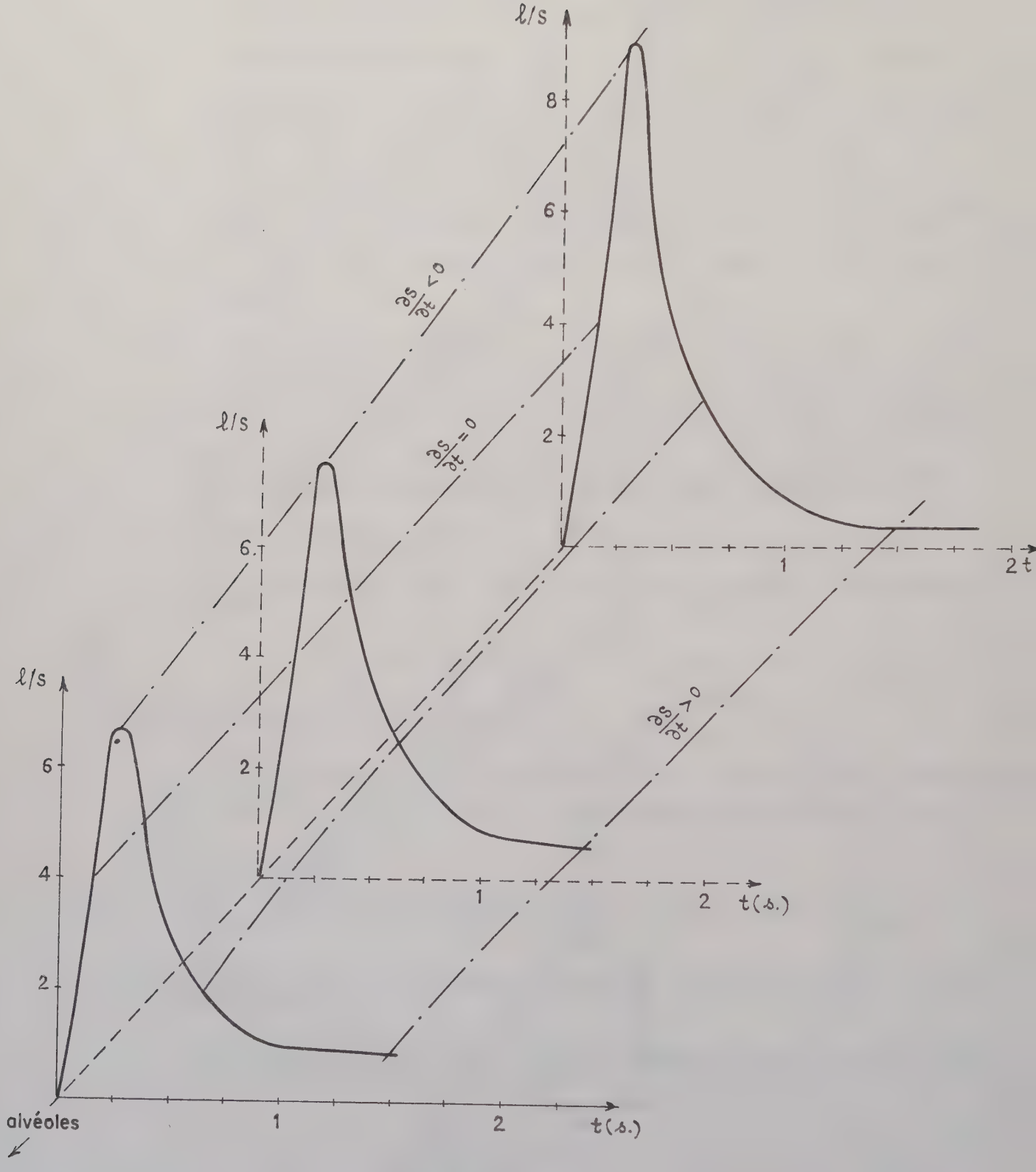
La figure 5.5. représente l'évolution temporelle du tuyau au cours d'une expiration forcée pour les instants :

$$\begin{cases} t_o = 0 \\ t_1 = 0.300\,s . \\ t_2 = 0.800\,s . \end{cases}$$



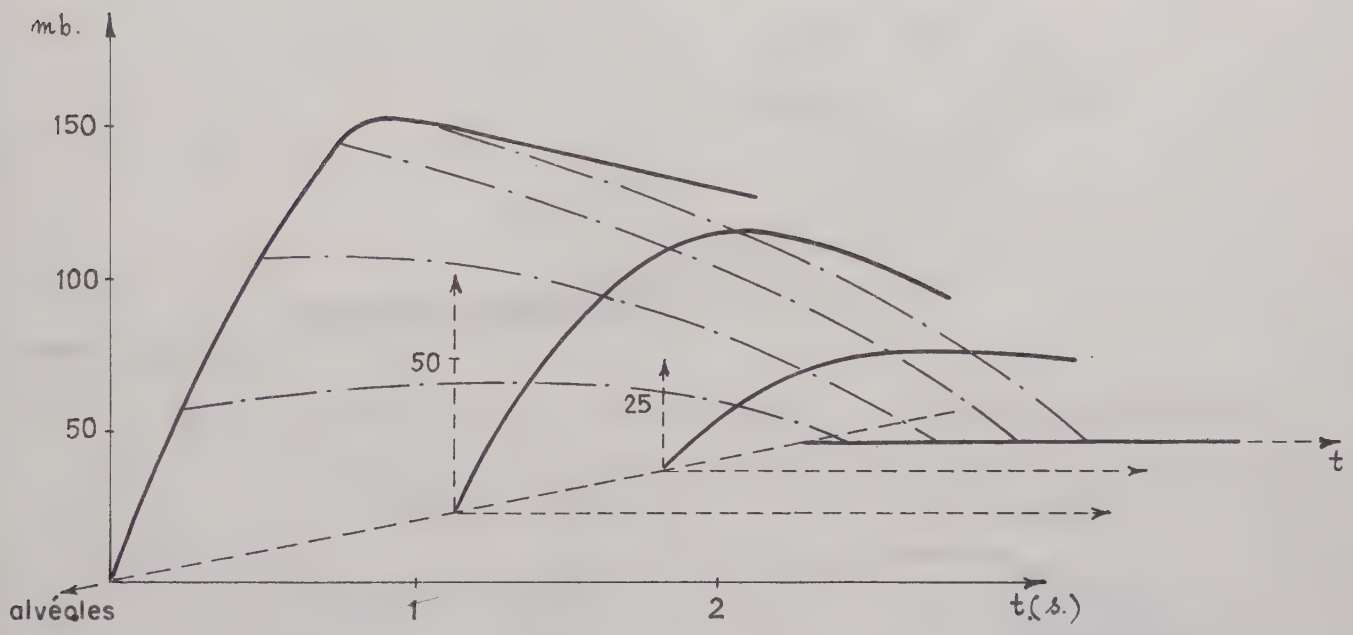
$S(x,t)$

Figure 5.5



$\dot{V}(\alpha, t)$

Figure 5.6 a



P(x,t)

Figure 5.6.b

Sur la figure 5.6. sont reportés les résultats concernant les fonctions : débit $Q(x,t)$(a) et pression interne $P(x,t)$(b) pour une relation $f(S,PTM)=0$ assurant un écart objet-modèle minimal (courbe ⑤ de la figure 5.4).

Enfin, la figure 5.7. permet de comparer les diamètres du tuyau à deux instants $t_o=250\,ms$ et $t_1=750\,ms$, lorsque les coefficients $A\phi$ sont différents, et correspondent à des solutions ${}^{m}P_a$ non oscillantes.

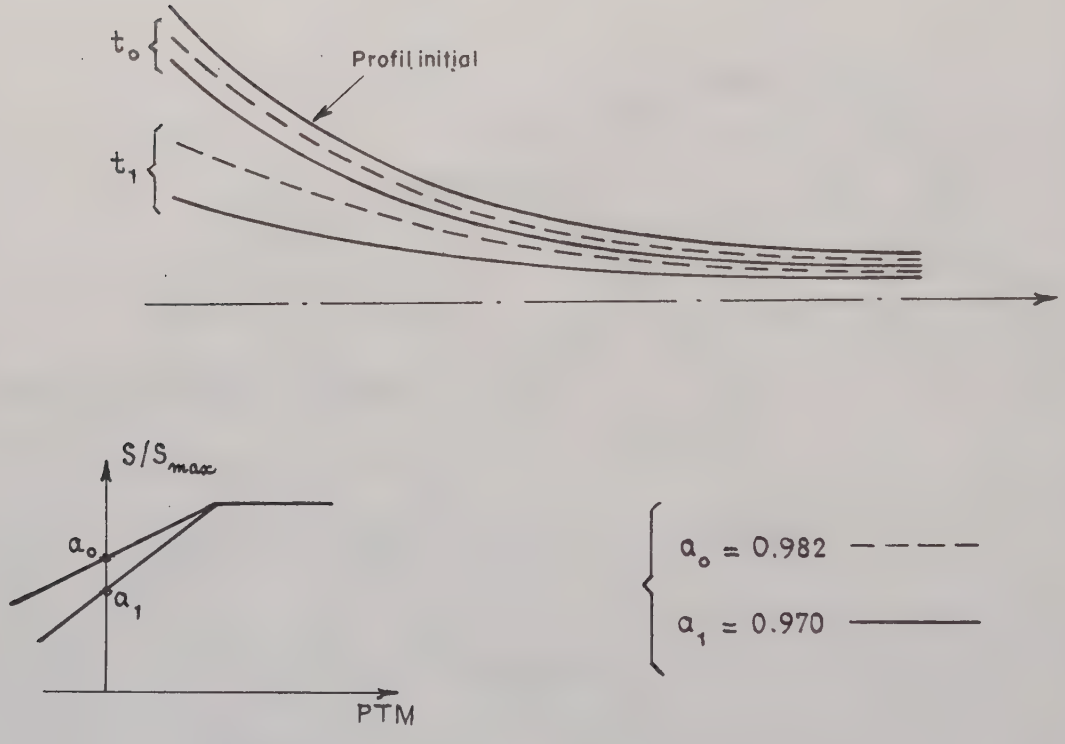


Figure 5.7

5.3. - INFLUENCE DE DIVERS PARAMETRES -

Il s'agit ici de déterminer l'effet d'une variation de paramètre sur la sortie du modèle. (*)

Le même système d'entrées est appliqué au modèle pour deux valeurs distinctes P_i^c et P_i^n d'un même paramètre P_i, tous les autres étant figés à des valeurs normales. La sensibilité du modèle vis-à-vis de ce paramètre est évaluée en

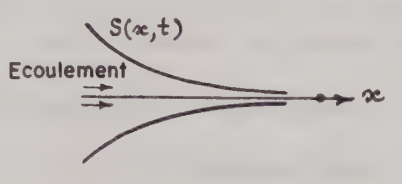
(*) le terme "paramètre" étant employé au sens large : il concernera aussi bien les dimensions géométriques du tuyau, le type de l'écoulement, les conditions initiales, etc...

comparant les sorties correspondantes ${}^{m}S(t,\mu_i^n)$ et ${}^{m}S(t,\mu_i^c)$. Dans le cas où la variation relative de la sortie s'est avérée faible (quelques %), la précision de la méthode numérique a été améliorée (précision > 1 %) par un choix de pas de calcul particulièrement faibles. La relation $f(S,PTM)=0$ fournissant un écart objet-modèle minimal dans le cas d'utilisation de paramètres normaux a été choisie.

L'effet d'une variation de paramètre pourra parfois être justifié en utilisant les équations du système (11)(12), écrites sous la forme :

$$(15)\quad \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

$$(16)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} - 2\frac{\dot{V}}{S^2}\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} + \frac{\dot{V}^2}{S^3}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S^2}\times 2^i$$



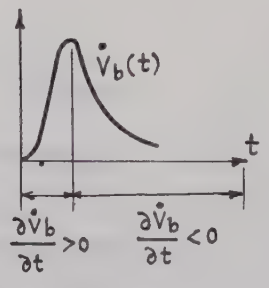
avec : * $\frac{\partial S}{\partial x} < 0$

* $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ (pression alvéolaire supérieure à la pression atmosphérique)

* compression bronchique, probablement pendant la majeure partie de l'expiration soit :

$$\frac{\partial S}{\partial t} < 0 \quad et \quad \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} > 0 .$$

* $\frac{\partial \dot{V}_b}{\partial t} > 0$ *puis* < 0



et probablement de même : $\frac{\partial \dot{V}}{\partial t}(x,t) > 0$ puis < 0 $(\forall x)$

* $\frac{8\pi\mu}{\rho}\frac{\dot{V}}{S^2}\times 2^i$ terme de frottement de module négligeable par rapport aux autres termes.

Le second membre de (17) est donc formé, tant que $\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} > 0$, de termes de mêmes signes.

5.3.1. - Paramètres concernant le tuyau -

a) dimensions géométriques :

- sections : S et $\frac{\partial S}{\partial x}$ jouent un rôle important vis-à-vis de l'écoulement ; (17) montre que :

$\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|$ croît avec $\frac{\partial S}{\partial x}$ et $\frac{1}{S}$

c'est-à-dire que la pression alvéolaire est d'autant plus grande, $\dot{V}_b(t)$ étant donné, que $\frac{\partial S}{\partial x}$ est grand et S faible.

Au cours des trois essais présentés sur la figure 5.8., les profils initiaux du tuyau correspondent à des modifications de $\frac{\partial S}{\partial x}(x,0)$ et $S(x,0)$ par rapport au cas normal.

Dans le cas ① seul S est modifié.

Les cas ② et ③ correspondent à des modifications simultanées de S et $\frac{\partial S}{\partial x}$.

Les pressions alvéolaires ainsi obtenues sont toutes supérieures à la pression normale, de

1,5 % pour les cas ① et ②

2,5 % pour le cas ③

uniformément tout au long de l'expiration ($t < 1,5\delta$.)

L'écart est plus grand dans le cas ③ car les conditions contradictoires

$$\begin{cases} \text{diminution de } S \\ \text{augmentation de } \frac{\partial S}{\partial x} \end{cases}$$

à partir d'un profil donné, sont mieux conciliées que dans le cas ② .

- Longueurs

Les longueurs des voies aériennes diminuent avec le volume pulmonaire. Toutefois, l'hypothèse :

$\ell(i,t) = \ell(i)$ ($\forall t$, $\forall i$, i : indice de génération)

n'a pas été remise en cause, car les lois de variation de $\ell(i)$ avec t , ou P_a , ou V_T , ne sont pas connues. Quelques lois empiriques (variation de $\ell(i)$ avec la racine cubique de V_T , référence [46]) ont récemment été proposées. Cependant, elles ne sont valables que dans des conditions statiques de mesure.

L'influence de la longueur du tuyau a été évaluée en modifiant les longueurs initiales des générations les plus souples.

Une augmentation de 10 % des longueurs des quatre dernières générations se traduit en une augmentation de 3 % de la pression alvéolaire, pratiquement uniformément au cours de l'expiration.

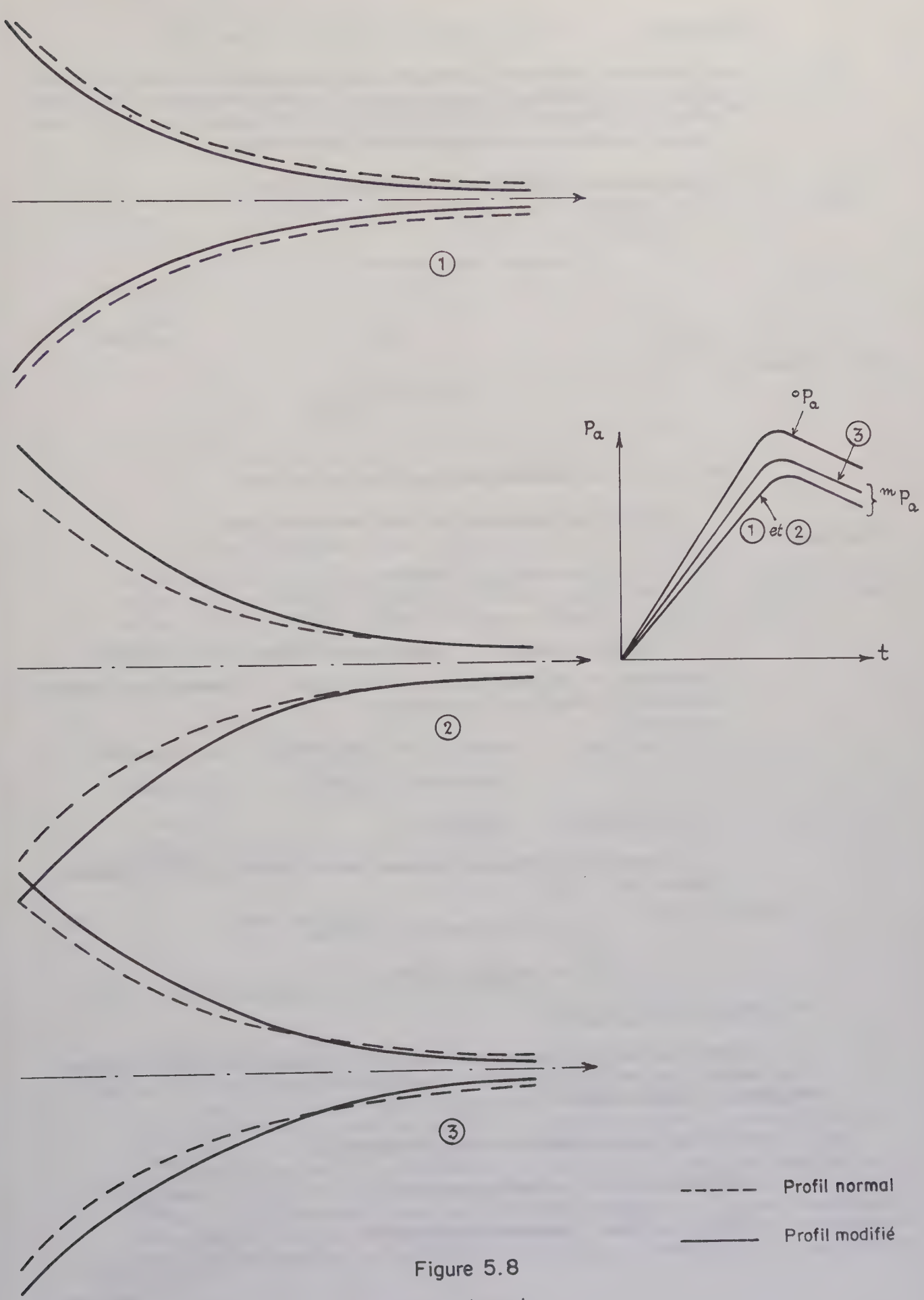


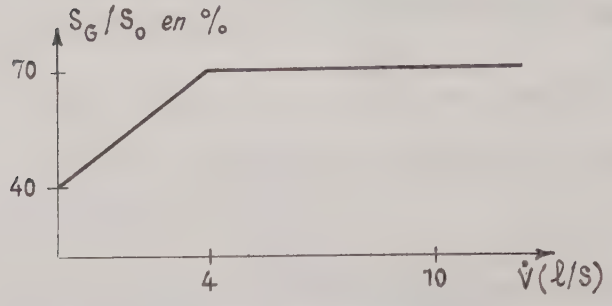
Figure 5.8

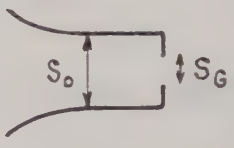
Influence de $\left|\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\text{initial}}$

- Glotte :

De récents travaux, portant sur l'évolution de l'ouverture de la glotte au cours d'une expiration forcée (référence [37]), permettent de déduire une loi approchée de variation de S_G - section de la glotte - en fonction du débit buccal.

La relation suivante a été adoptée :





où S_o est la section de la génération 0.

La chute de pression ΔP est calculée grâce à :

$$\Delta P = \frac{\rho}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{S_G^2} - \frac{1}{S_o^2}\right)\dot{V}^2$$

S_G augmentant avec $\dot{V}$, les deux facteurs de ΔP varient globalement en se compensant, si bien que ΔP reste pratiquement constante au cours de l'expiration :

$\Delta P \# 1.5$ mb pour 200 ms $< t <$ 400 ms (cet intervalle correspond à $\dot{V}_b > 6$ ℓ/s)

$\Delta P \# 0.8$ mb ailleurs.

La pression alvéolaire obtenue est supérieure à la pression normale, de

1 % pour 200 ms $< t <$ 400 ms

1,5 % en moyenne ailleurs.

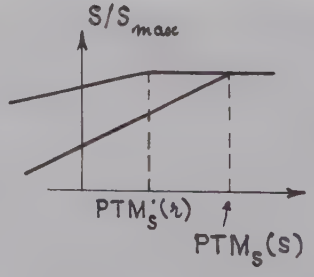
b) élasticité des parois :

Il est logique de penser que les voies aériennes les plus souples réagissent à un seuil de pression transmurale plus élevé que les générations les plus rigides.

La distinction suivante a donc été faite :

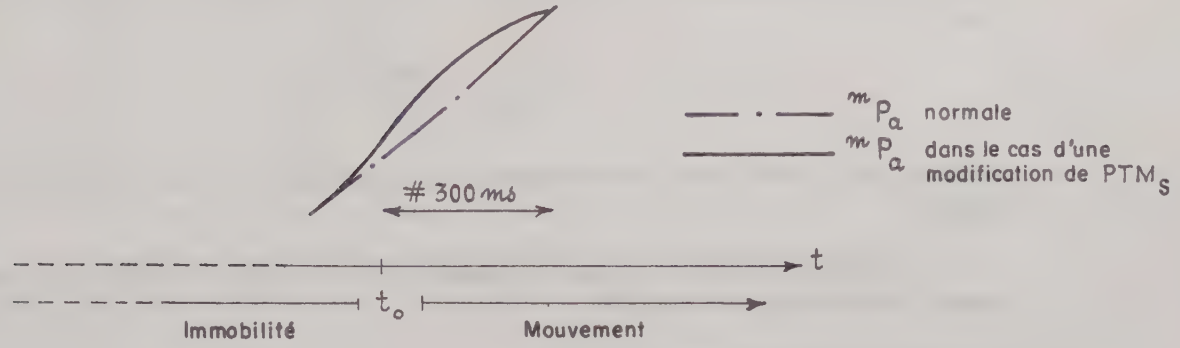
$PTM_S(r) = 5$ mb générations 0 à 4

$PTM_S(S) = 15$ mb autres générations.

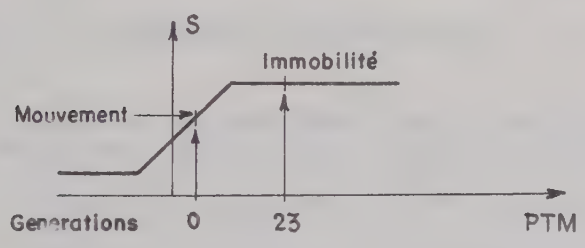


Elle se traduit au niveau de ${}^{m}P_a(t)$:

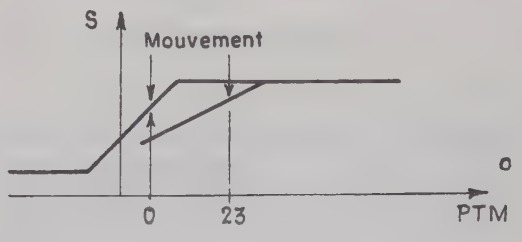
- par une variation de l'instant t_o où les parois du tuyau cessent d'être immobiles (t_o passe de 180 ms à 150 ms pour l'une des expirations considérées).
- par une augmentation de la pression alvéolaire, de l'ordre de 1 mb à l'instant t_o , négligeable pour $t > t_o + 300\,ms$.



Il faut également noter que lorsque $PTM_S(\lambda) < PTM_S(S)$, l'écrasement bronchique a lieu pratiquement simultanément pour toutes les générations, ce qui est plus logique que le résultat obtenu dans les conditions normales : $PTM_S(\lambda) = PTM_\delta(\delta)$, puisque dans ce cas la première génération bouge avant toutes les autres.



Seuils identiques



Seuils différents

5.3.2. - Facteurs concernant l'écoulement -

a) hypothèse $\frac{\partial Q_\lambda}{\partial x_\lambda} \neq 0$

Les difficultés pratiques de mise en oeuvre de la simulation - essentiellement la mise au point du programme général de résolution de (11)(12)(13) - ont conduit à adopter cette hypothèse au cours d'une phase préliminaire. Il s'agissait, en simplifiant les problèmes de résolution, de tester grossièrement la validité du modèle élaboré en II. En effet, une différence flagrante des comportements de l'arbre bronchique et du modèle aurait conduit immédiatement, sans entreprendre une révolution alors inutile du problème dans toute sa généralité, à remettre en

cause certaines hypothèses, ou à abandonner le modèle.

Comme le montre la figure 5.9, la pression alvéolaire obtenue est nettement inférieure à la pression normale.

L'équation (17) associée à $\frac{\partial \dot{V}}{\partial x} > 0$ confirme que les pressions internes $P(x,t)$ - et par conséquent la pression alvéolaire et les pressions transmurales - ainsi obtenues sont inférieures aux pressions réelles ; dans ces conditions, le tuyau a donc moins tendance à se comprimer. L'hypothèse consistant à négliger $\frac{\partial Q_r}{\partial x_r}$ par rapport à $\frac{\partial S_r}{\partial t_r}$ dans l'équation :

$$32 \frac{\partial Q_r}{\partial x_r} + \frac{\partial S_r}{\partial t_r} = 0$$

semble donc avoir pour conséquence de maintenir $\frac{\partial S_r}{\partial t_r}$ à une faible valeur.

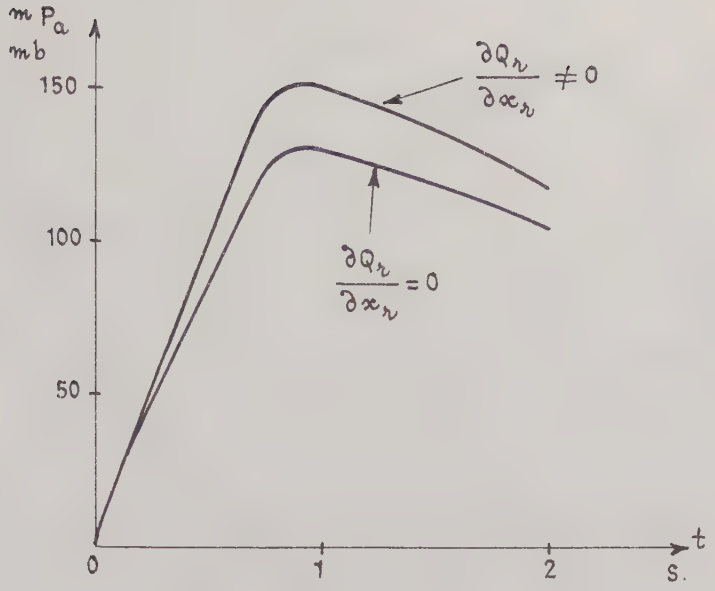
L'erreur relative moyenne commise en supposant $\frac{\partial Q_r}{\partial x_r} \neq 0$ peut finalement être évaluée à 15 %.

b) terme de frottement

Le tableau suivant résume les résultats obtenus en faisant varier le terme de frottement de façon empirique (référence [58]).

Ecart relatif (en %) $\frac{P_a - P_{a_o}}{P_{a_o}}$	Terme de frottement $k \frac{\dot{V}}{S}^{3/2}$	$k \frac{\dot{V}}{S}^{2/3}$	$k \frac{\dot{V}}{S}^{2}$
$\dot{V} = 10$ ℓ/s	0.4	0.9	1.3
$\dot{V} = 2$ ℓ/s	0.1	0.1	0.2

avec :
- $k = \frac{8\pi\mu}{\rho} \times 2^i$
- P_a = pression alvéolaire obtenue avec le frottement considéré
- P_{a_o} = pression normale (frottement : $\frac{8\pi\mu}{\rho} \frac{\dot{V}}{S} \times 2^i$)



Hypothèse $\frac{\partial Q_r}{\partial x_r} \neq 0$

Figure 5.9

5.3.3. - Conditions aux limites -

Le pas de calcul temporel variant entre 0.1 ms et 12 ms, la synchronisation des données $\dot{V}_b(t)$, $P_{pl}(t)$ et $V_T(t)$ est importante.

La formule

$$^{\circ}P_a(t) = P_{pl}(t) + e^{0,427\left[V_m - \left(V_T(0) - V_T(t)\right) + 1,78\right]}$$

montre la dépendance de la pression alvéolaire de l'objet - c'est-à-dire la grandeur de référence lorsque $S(t) = P_a(t)$ - vis-à-vis de $V_T(0)$.

Les courbes de la figure 5.10 sont obtenues en introduisant un retard de 75 ms sur les grandeurs P_{pl} et $\dot{V}_b$.

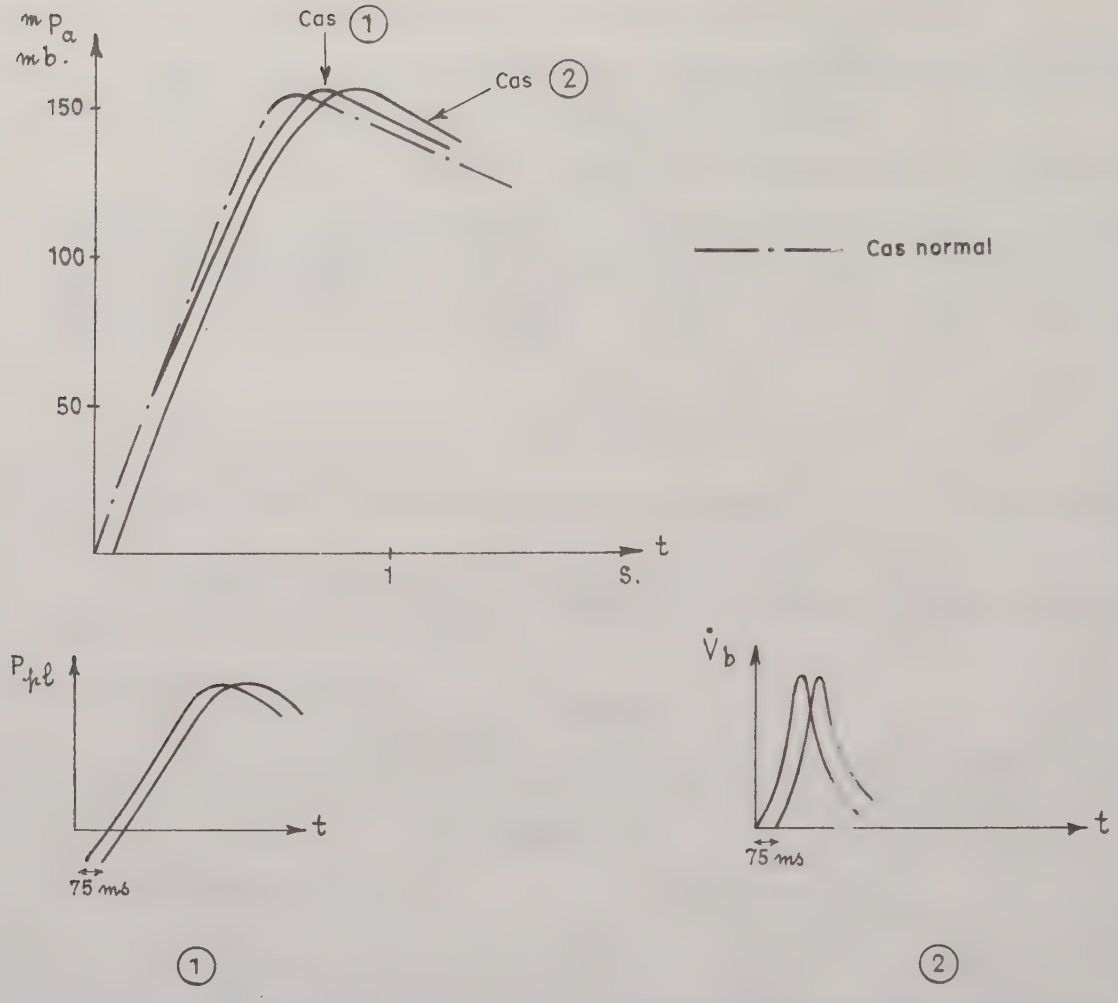


Figure 5.10

Retards sur les fonctions aux limites

5.4. - REMARQUES -

1) L'adoption de $\begin{cases} \dot{V}_b = S(t) \\ P_a = e(t) \end{cases}$ conduit à la même exploitation qualitative du modèle. La figure 5.11. représente ainsi le débit buccal $^{m}\dot{V}_b(t)$ obtenu lorsque (13) correspond à une inertie bronchique trop forte.

2) La stabilité de la procédure a également été testée en étudiant l'amplification d'une erreur délibérée de 30 % sur l'entrée $\dot{V}_b(t)$ pendant 200 ms (figure 5.12). Dans le cas $\Delta T = 30ms$, la procédure n'est pas stable, tandis que pour $\Delta T = 1ms$, l'écart entre l'approximation numérique et la solution (1) tend à diminuer au cours du temps

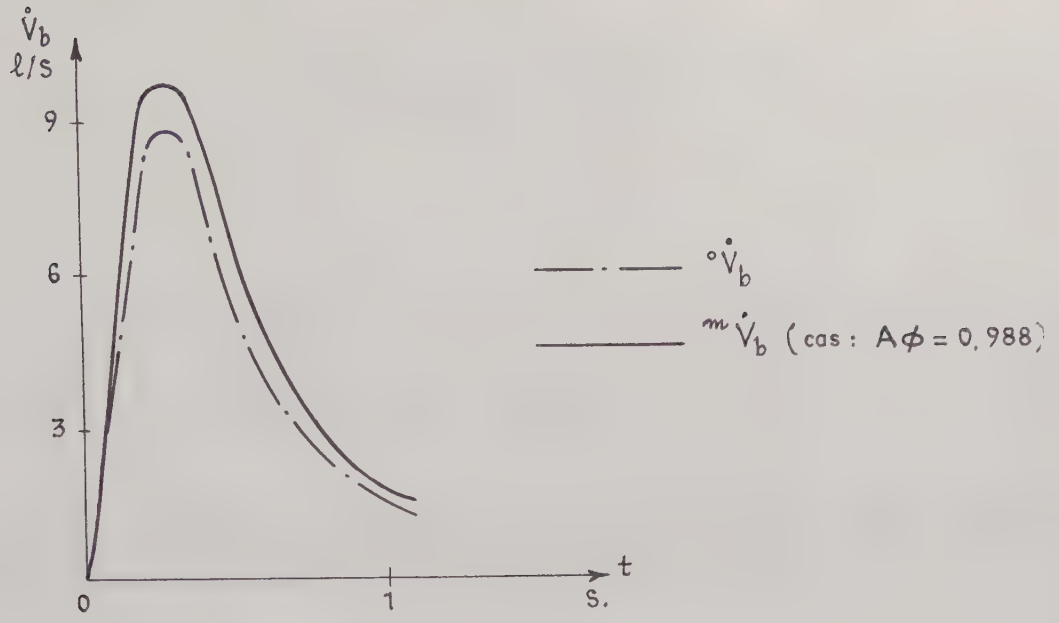


Figure 5.11

Débit buccal

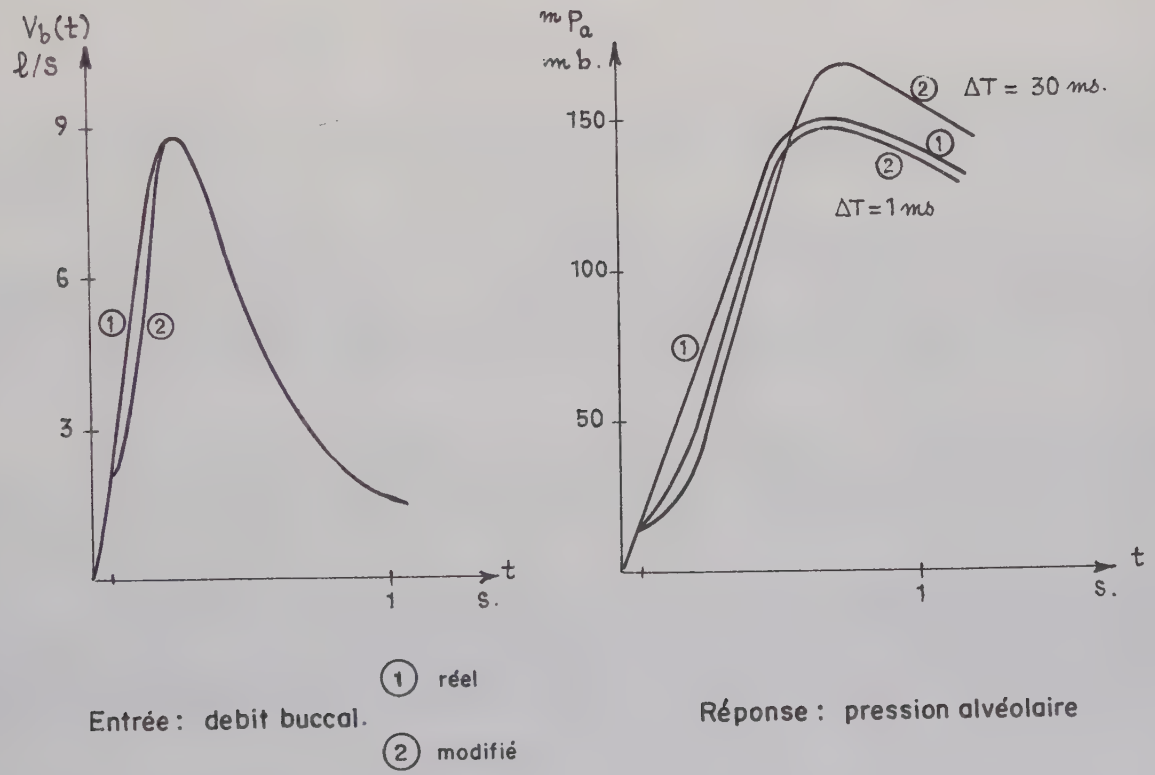


Figure 5.12

Amplification d'une erreur sur la fonction aux limites $\dot{V}_b(t)$

Chapitre 6

DISCUSSION DES RESULTATS

D'une façon générale, la question de la validité d'un modèle se pose de la façon suivante : la structure choisie - c'est-à-dire la nature de l'opérateur qui fait passer du stimulus au comportement - assure-t-elle un degré suffisant de conformité entre les comportements du modèle et de l'objet qu'il est censé représenter ?

En l'occurence, il s'agit donc de déterminer si, au cours du processus expérimental choisi, le système pulmonaire est effectivement bien décrit par le système d'équations aux dérivées partielles (11) (12)(13).

$$\begin{cases} (11) & \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ (12) & \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial (V^2/S)}{\partial x} = -\dfrac{S}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} - 8\pi \dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\dot{V}}{S} \times 2^{i} \\ (13) & f(S, PTM) = 0 \end{cases}$$

Cependant, la connaissance des propriétés d'élasticité bronchique étant à l'heure actuelle encore très incomplète, la structure du modèle présente, en l'équation (13) $f(S,PTM)=0$ une indétermination.

Les équations (11) et (12) renfermant les hypothèses concernant l'écoulement aérien, la répartition des grandeurs physiques appliquées au système, et la géométrie de l'arbre bronchique ; la simulation a par conséquent consisté à déterminer, dans un premier temps, s'il existait une relation (13) susceptible d'assurer une similarité qualitative des comportements objet et modèle.

D'autre part, le modèle repose sur de nombreuses hypothèses imposées par le manque de connaissance actuel du système pulmonaire. La simulation a donc également consisté, dans un deuxième temps, à tester l'influence de ces hypothèses sur la sortie du modèle.

L'ensemble des résultats obtenus permet ainsi d'apprécier la validité globale du modèle, et conduit à définir des conditions indispensables à l'entreprise d'une étape ultérieure d'exploitation quantitative du modèle, cette étape permettant d'atteindre le but primitivement fixé de détection de maladies respiratoires.

6.1. - INTERPRETATION DE L'INFLUENCE DE L'EQUATION D'ETAT BRONCHIQUE -

- La pression alvéolaire obtenue en simulation lorsque l'équation (13) provient de l'utilisation directe de courbes expérimentales fournies par la littérature, est très différente de la pression alvéolaire réelle. Ceci conduit à l'alternative suivante :

  - l'équation (13) ainsi adoptée est correcte, mais les hypothèses conduisant à (11) et (12) ne sont pas justifiées.

  - l'équation (13) ne décrit pas correctement le comportement bronchique au cours du processus étudié.

  Les courbes expérimentales utilisées étant obtenues dans des conditions statiques d'application des pressions transmurales, il est logique de retenir la seconde éventualité. En effet, au cours d'une expiration forcée, les dynamiques de variation des pressions transmurales atteignent 500 mb/s ; l'adoption des résultats statiques revient ainsi à supposer que les bronches peuvent, en 10 ms, passer de 100 % à 30 % de leur section initiale - hypothèse irréaliste -

- Les résultats obtenus en tenant compte d'une inertie bronchique laissent supposer que la relation $f(S,PTM)=0$ est en réalité une équation aux dérivées partielles du type :

$$f\left(S, PTM, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial PTM}{\partial t}, \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 PTM}{\partial t^2}\right) = 0$$

  Les coefficients α et β de l'équation du premier ordre proposée au chapitre V ayant été, faute d'information, évalués par de nombreuses et fastidieuses tentatives d'approches successives, il est indispensable, afin de réduire l'écart objet-modèle pendant la totalité de l'observation des phénomènes, de développer de nouveaux moyens d'exploration du système pulmonaire. Il s'agirait en l'occurence d'observer le comportement dynamique d'un nombre suffisant de bronches.

- Les résultats obtenus en choisissant une relation linéaire section - pression transmurale se prêtent à des interprétations concernant la pathologie respiratoire :

  1) Lorsque les bronches sont trop souples (ceci correspond au cas : $A\phi$ faible - voir chapitre V § 5.2) la pression alvéolaire que devrait développer le sujet afin de rejeter l'air vers l'extérieur selon un débit $\dot{V}_b$ normal, est à certains instants 3 à 4 fois plus élevée que celle qu'un sujet normal produit pour atteindre le même débit $\dot{V}_b(t)$ le sujet malade ne pouvant générer une telle pression, seule une faible partie des gaz alvéolaires est rejetée vers l'extérieur.

  2) Lorsque les bronches sont trop raides (cas extrême $A\phi=1$, le tuyau est totalement rigide) la pression alvéolaire assurant le même débit $\dot{V}_b(t)$ est, au contraire, environ 3 fois plus faible que la pression normale.

Il faut donc en déduire que l'écoulement aérien est facilité par une raideur bronchique maximale.

Cependant, il existe une pathologie respiratoire due à une trop grande raideur bronchique ; d'après les résultats fournis par le modèle, elle ne peut être due qu'à une déficience de fonctionnement au niveau des alvéoles ; il ne faut pas s'étonner de ce résultat, qui pourrait traduire qu'en cas de rigidité excessive de l'arbre bronchique, l'action de compression alvéolaire des muscles respiratoires ne se transmet pas aux 300 millions d'alvéoles, mais ne s'applique qu'aux alvéoles périphériques, directement en contact avec la plèvre (figure 6.1).

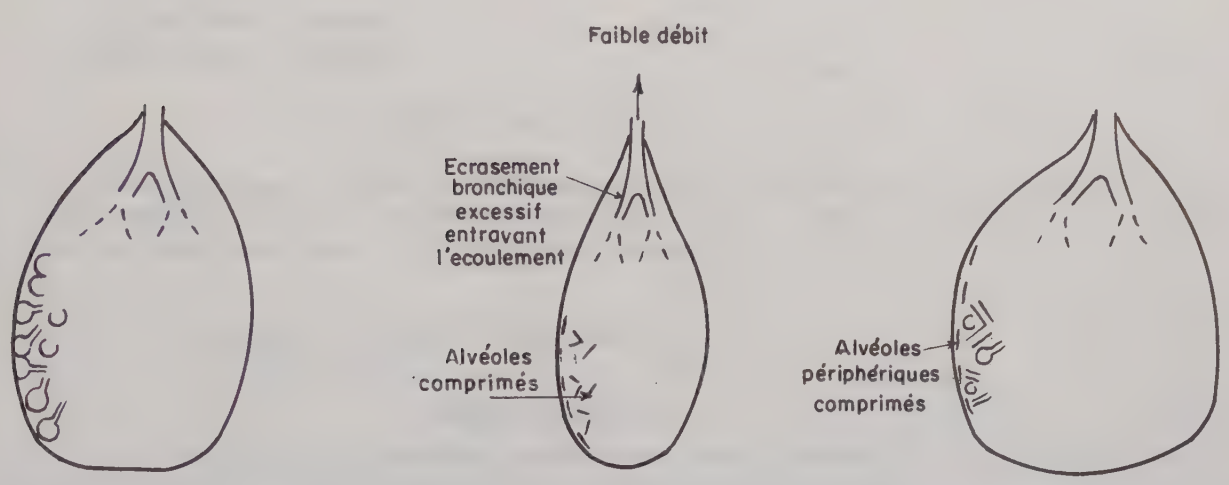


Figure 6.1

Pathologie respiratoire

Finalement, le comportement du modèle tendrait à prouver qu'idéalement, les bronches ne doivent être ni trop souples, ni trop raides ; une élasticité bronchique excessive entrave l'écoulement aérien, tandis qu'une rigidité excessive s'accompagne d'une déficience au niveau des alvéoles.

Ces résultats sont d'ailleurs en accord avec des constations expérimentales : le sujet atteint d'une "raideur bronchique trop élevée" ventile aussi bien et quelquefois mieux qu'un sujet normal.

Pendant que cette étude du système pulmonaire était entreprise, J.M.B. Hughes (référence [46]) a effectué des mesures directes sur des poumons de chiens excisés ; l'opacification des bronches et l'introduction de multiples (une vingtaine) catheters dans ces dernières a permis à Hughes de tracer des courbes (figure 6

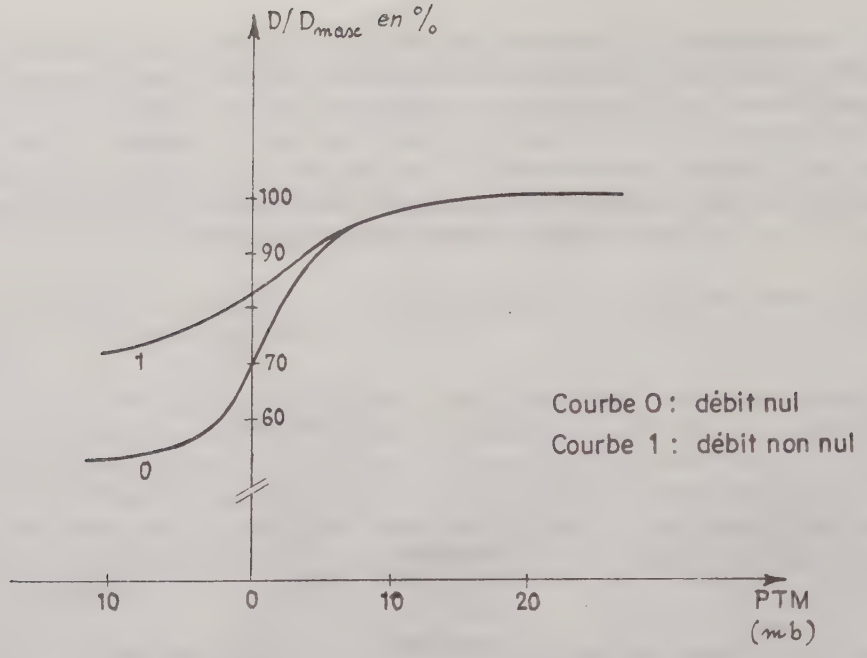


Figure 6.2 (*)

(*) d'après Hughes

de variation du diamètre bronchique avec la pression transmurale lorsque le débit buccal est nul (courbe 0) ou non nul (courbe 1).

Il est intéressant de remarquer que par l'approche de modélisation mathématique que nous avons choisie, nous soyons arrivés transitoirement aux mêmes conclusions - "relèvement" des courbes statiques en régime dynamique - Cependant, à notre avis, la relation $f(S, PTM) = 0$ n'est pas représentable dans un système d'axes S - PTM puisqu'elle doit contenir des termes en $\frac{\partial PTM}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 PTM}{\partial t^2}$ etc..

En conclusion, l'étude de l'influence de l'équation d'état bronchique conduit aux remarques suivantes :

(1) L'inertie des bronches est importante : le comportement bronchique en régime dynamique n'est pas assimilable au comportement statique.

(2) La relation section - pression transmurale est probablement une équation aux dérivées partielles, au moins du second ordre, dont la connaissance nécessite le développement impératif de moyens d'investigation directs de l'arbre bronchique.

(3) La grande sensibilité du modèle vis-à-vis de cette relation est encourageante ; la pathologie respiratoire que nous nous proposons par la suite de détecter devrait, en effet, se traduire au niveau de cette relation par exemple par une variation importante des coefficients de l'équation aux dérivées partielles.

6.2. - INTERPRETATION DE L'INFLUENCE DE CERTAINS PARCEMETRES -

Le tableau suivant résume le sens de variation de la sortie du modèle ${}^{m}P_a(t)$ pour $t<750ms$, suivant le facteur considéré.

	$\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{initial}$	$\ell(i)_{initial}$	$PTM_S(x)$	frottement
${}^{m}P_a$	↗	↗	↗	↗

(↗ : croît ; ↘ : décroît)

Pour $t<750ms$ (500 ms à 750 ms suivant l'expiration considérée), la sortie - modèle ayant été inférieure à la sortie - objet, les résultats de la simulation conduisent aux interprétations suivantes :

6.2.1. - Influence de $\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{initial}$ et $\ell(i)_{initial}$:

Les sections maximales des dernières générations ($i \notin (0,4)$) sont en réalité plus élevées que celles fournies par Weibel.
(hypothèse : $S_{iw} \# S_{i\,max} = S_i^{\circ}$ $(\forall i)$, § 5.1.2. chap. V).

Ceci peut être dû :

- soit à un sous-dimensionnement de l'arbre bronchique conséquent à l'hypothèse de structure dichotomique régulière. En effet, une trichotomie survenant au niveau de la génération 2 ou 3 peut conduire à négliger l'existence de plusieurs dizaines de milliers de bronches et bronchioles.
- soit à la dépendance de S_i vis-à-vis du degré d'inflation pulmonaire (multiplication de S_{iw} par un facteur 1.3 à 2 si l'inflation est maximale, d'après une estimation de E.R. Weibel).

Cette seconde hypothèse est d'ailleurs confirmée par l'influence de $\ell(i)_{initial}$ sur ${}^{m}P_a$, $\ell(i)$ augmentant avec le degré d'inflation pulmonaire.

Au stade de l'élaboration du modèle (chapitre II § 2.2), le choix d'une représentation dichotomique régulière de l'arbre bronchique avait semblé important. Il apparaît ici que ce choix n'est pas fondamental. En effet, l'influence de $S(\alpha,0)$ sur la sortie du modèle permet d'envisager la réalisation d'une expérience d'ajustement de $S(\alpha,0)$ à une valeur adaptée au sujet considéré. La fonction ainsi déterminée ne correspondrait à aucun type particulier de structure géométrique de l'arbre bronchique, mais au seul souci de réduction de l'écart objet - modèle pour une classe d'entrées particulière.

6.2.2. - Influence du seuil de pression transmurale -

La différence entre les seuils de pressions transmurales de chacune des générations :

$$PTM_s(i+1) > PTM_s(i) \qquad : \text{indice de génération}$$

- peut traduire, d'une part, que les bronches périphériques et souples se compriment antérieurement aux bronches internes et rigides

- permet, d'autre part, de tenir compte de l'inhomogénéité de répartition de la pression pleurale ; en définissant PTM par la relation :

$$PTM = P_{in} - P_{ext} \qquad \frac{\times P_{ext}}{\times P_{in}}$$

P_{ext} : pression extérieure bronchique.

La distinction de plusieurs seuils de pressions transmurales revient indirectement à supposer que :

$P_{ext} = P_{pl}$ pour les bronches périphériques

$P_{ext} \neq P_{pl}$ pour les bronches internes.

6.2.3. - Influence des frottements -

La présence de la glotte, ainsi que la forme du terme de frottement - intermédiaire entre laminaire et turbulent - ont une influence sur la sortie - modèle de l'ordre de 1 %. Etant donné que l'arbre bronchique est un réseau complexe de nombreux tubes multibranchés, cette influence parait faible. Afin de tenir compte de façon plus réaliste des frottements dûs aux bifurcations, il conviendrait sans doute d'augmenter l'importance du terme de frottement, par exemple en le supposant de la forme :

$$k \frac{\dot{V}^m}{S^2}$$

avec $m > 2$ malgré les résultats des travaux de Pedley [58], préconisant la valeur de $m = \frac{3}{2}$.

Il faut noter, enfin, qu'à la vue de l'ensemble des résultats du chapitre V, l'accumulation des diverses hypothèses pourrait entraîner une incertitude atteignant 10 % sur la sortie du modèle. Cette remarque ainsi que les difficultés rencontrées lors de la résolution du système d'équations aux dérivées partielles, constituent une justification a postériori de certaines hypothèses simplificatrices - unidimensionnalité de l'écoulement, incompressibilité de l'air - qui avaient paru discutables au stade de l'élaboration du modèle.

6.3. - VALIDITE DU MODELE ET CONCLUSIONS -

6.3.1. - Validité du modèle et contraintes dues au manque d'informations -

Le modèle proposé est intermédiaire entre un modèle de representation et un modèle de connaissance : l'analyse microscopique de l'écoulement aérien le long d'une bronche a été suivie de diverses simplifications imposées à la fois par la complexité de la résolution du problème pris dans toute sa généralité et par un manque d'informations précises concernant la structure du système pulmonaire. Ceci a finalement conduit à un modèle global constitué d'un tube élastique de section variable, les phénomènes d'inspiration ou expiration étant assimilés à l'écoulement unidimensionnel de l'air, supposé incompressible, dans ce tube.

A la vue des résultats concernant aussi bien les essais de diverses structures que les tests des influences de certaines hypothèses, il semble raisonnable d'affirmer, quoique l'écart objet - modèle demeure encore important, surtout en fin d'expiration, que le modèle proposé est qualitativement satisfaisant ; en particulier, contrairement aux modèles du système pulmonaire élaborés jusqu'à ce jour, le domaine de validité de ce modèle s'étend au processus d'expiration forcée. La grande sensibilité du modèle vis-à-vis de l'équation d'état bronchique prouve d'autre part que ce processus expérimental convient à l'objectif poursuivi de détection de la pathologie bronchique.

Cependant, le manque de connaissance et de moyens d'investigations actuels du système pulmonaire est très contraignant.

En effet, ceci a imposé des hypothèses - structure géométrique de l'arbre bronchique, écoulement, répartition de pressions - dont l'influence sur le comportement du modèle parait être de l'ordre de 1 à 2 % pour chacune d'entre elles.

De plus, les grandeurs physiques, difficilement accessibles, sont évaluées au prix de nouvelles hypothèses de mesure : la pression pleurale est assimilée à la pression régnant dans la partie moyenne de l'oesophage thoracique ; la pression alvéolaire est estimée grâce aux résultats d'une expérience préliminaire effectuée dans des conditions statiques. L'incertitude entachant de tels résultats pourrait être de l'ordre de 10 à 20 %, peut être même plus aux instants où les dynamiques de variation sont élevées ; et, de ce fait, comme nous l'avons vu, certaines hypothèses ayant paru critiquables a priori trouvent une justification a posteriori.

Il apparaît donc que si le modèle proposé est qualitativement satisfaisant, il serait imprudent de l'exploiter quantitativement sans, pour cela, primitivement :

- élaborer, d'une part, des moyens d'investigation directe du système pulmonaire permettant de s'affranchir de certaines hypothèses
- développer, d'autre part, de nouvelles méthodes de mesure, adaptées au processus expérimental choisi.

6.3.2. - Conditions nécessaires à une exploitation quantitative du modèle -

a) Investigation directe du système pulmonaire

L'observation du comportement des bronches durant une expiration forcée permettrait de lever un certain nombre d'incertitudes.

En s'inspirant des travaux de J.M.B. HUGUES (ref [46]) nous nous proposons de réaliser une expérience qui devrait permettre d'identifier la forme de la relation $f(S, PTM) = 0$.

De multiples catheters radiopaques sont introduits dans les bronches (jusqu'aux générations 5 ou 6 si possible) de poumons excisés de chien, elles-mêmes opacifiées. Les poumons sont placés dans un pléthysmographe (figure 6.3) où la pression P_{exct} peut être imposée de façon à simuler de façon optimale une expiration forcée. Une caméra permet d'observer les bronches toutes les 50 ms.

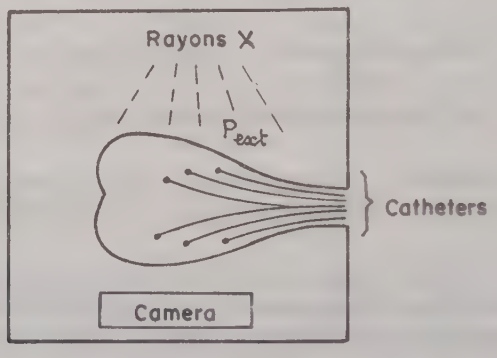


Figure 6.3

Les figures 6.4. et 6.5. sont des radiographies de l'arbre bronchique obtenues dans des conditions statiques de mesure, alors qu'aucun catheter n'a été implanté. (d'après une expérience réalisée par P. Gayrard - référence [ ]). De telles images pourraient permettre non seulement d'évaluer $S, \frac{\partial S}{\partial t}$ et $PTM, \frac{\partial PTM}{\partial t}$ mais, peut-être également, d'observer la diminution des longueurs bronchiques en fonction du degré d'inflation pulmonaire.

b) Nouvelles méthodes de mesure

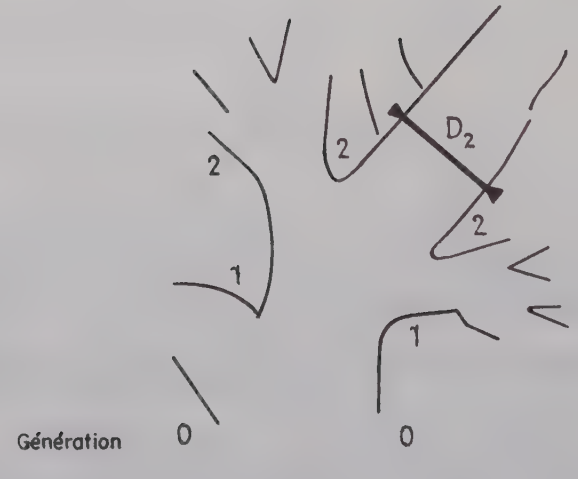
Il est indispensable de développer une méthode de mesure de la pression alvéolaire qui ne soit pas fondée sur une expérience statique préliminaire, mais qui soit, au contraire, valable même lorsque les dynamiques de variation de P_a et P_{pl} sont élevées. Certains auteurs se penchent actuellement sur l'écriture d'une loi thermodynamique traduisant la compression des gaz alvéolaires.

Enfin, l'ensemble de la chaîne de mesure devra être étudié de très près : transmittance des capteurs, analyse spectrale des données, synchronisation des acquisitions compatible avec l'adoption d'un pas de calcul temporel de 0.1 ms lors de la résolution du système d'équations aux dérivées partielles.

$D_2 / D_1 \# 76\%$ (voir figure 6.5)

$(PTM)_1 \# 20$ mb.

Figure 6.4- Opacification de l'arbre bronchique chez le chien



$(PTM)_2 \neq 0$

Figure 6.5

Opacification de l'arbre bronchique chez le chien

Chapitre 7

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Malgré le caractère préliminaire de cette étude, les résultats obtenus sont suffisamment cohérents pour permettre de dresser un premier bilan et d'envisager des développements ultérieurs.

Pour parvenir à ces résultats, un modèle des écoulements gazeux du système pulmonaire a été établi, utilisant des formulations classiques de la mécanique des fluides. Le souci de maintenir un équilibre entre la nécessité de faire une étude fine de l'arbre bronchique et les contingences des méthodes numériques actuelles a présidé tout au long de ce travail et autorise un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, concernant essentiellement la géométrie de l'objet étudié. Seule une étude systématique de la morphométrie de l'arbre bronchique permettra de vérifier la validité de ces hypothèses.

Il n'en reste pas moins que dans sa conception actuelle le modèle proposé présente trois originalités :

1 - l'approche du fonctionnement mécanique du système pulmonaire a été faite à partir d'équations fondamentales de la physique, les équations de Navier-Stokes, sans négliger les dérivées partielles par rapport au temps, ni les termes non-linéaires.

2 - le modèle s'est révélé valable pour une classe d'entrées bien plus large que celle des modèles précédemment mis au point, et il permet d'aborder, entre autres, les phénomènes de l'expiration forcée avec un regard neuf.

3 - La confrontation précise avec les résultats de l'expérimentation clinique a été recherchée, aussi bien pour valider la structure du modèle que pour aborder les problèmes d'une identification paramétrique sur laquelle nous reviendrons.

Il apparaît donc au total que cette étude a débouché sur des résultats satisfaisants et très prometteurs, le modèle étant qualitativement validé pour un processus expérimental faisant apparaître des phénomènes de dynamique élevée.

Les difficultés rencontrées tout au long de ce travail appellent cependant quelques remarques :

La modélisation d'un tel système est beaucoup plus complexe que celle d'un ensemble industriel, que ce soit un four, une chaîne de fabrication, ou un réacteur. Cela tient essentiellement, nous l'avons vu, à la nature biologique de l'objet. Il n'est pas possible, par exemple, de "démonter" le système pour effectuer un certain nombre de mesures ; et ce manque d'information entraîne de nombreuses hypothèses dont la validité est difficilement estimable. En plus de cette difficulté d'accès à la structure interne de l'objet étudié, il est rarement possible d'imposer les entrées souhaitées, si bien que l'on doit le plus souvent faire un compromis entre une représentation très fine mais grande consommatrice de

paramètres et une représentation trop globale où les paramètres perdent toute signification physique.

Cette revue des difficultés propres aux systèmes biologiques ne serait pas complète si l'on omettait de parler de la dispersion considérable qui existe d'un individu à l'autre et qui atteint couramment, pour certaines grandeurs, plusieurs dizaines de pour-cent. On comprend donc qu'une précision dans les mesures de l'ordre de dix pour-cent soit jugée amplement suffisante par la plupart des physiologistes. Malheureusement, une telle précision ne peut suffire pour une identification convenable et nous en venons ainsi tout naturellement aux perspectives que nous ouvre ce modèle.

En effet, le but lointain affiché en tête de ce mémoire est la mise en évidence de la pathologie respiratoire à l'aide d'un modèle. L'utilisation de méthodes d'identification de processus semble particulièrement bien adaptée dans ce cas, les paramètres intéressants étant ceux de l'équation d'état bronchique et qui sont au nombre de trois. Les autres paramètres sont essentiellement des grandeurs géométriques qui pourront éventuellement être figées dans la mesure où des expériences d'investigation directe auront permis de tester la validité des hypothèses portant sur la structure géométrique de l'arbre bronchique.

De toutes façons, un effort important devra être fait au niveau de l'acquisition des données, et plus particulièrement pour la détermination de la pression alvéolaire.

En conclusion, il apparaît clairement que, même dans son état présent d'élaboration, le modèle proposé apporte une contribution à l'analyse du système pulmonaire. Il est important de souligner qu'il n'est absolument pas possible de négliger le comportement dynamique des parois bronchiques dans le cas d'une expiration forcée, et que cette étude a eu pour effet de proposer une formulation originale pour l'équation d'état de ces parois. La poursuite de ce travail, avec plus de précision dans la mesure des données, devrait donc permettre d'atteindre les objectifs diagnostiques qui ont été entrevus.

ANNEXE

APPROXIMATION DE LA SOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES PAR UNE METHODE NUMERIQUE -

Dans ce paragraphe :

$u(x,t)$ désigne la solution exacte d'une équation aux dérivées partielles

ΔX : le pas de calcul en abscisse x

ΔT : le pas de calcul en temps t

$v_i^j = v(i,j) = v(i\Delta X, j\Delta T)$: l'approximation numérique de $u(x,t)$ au point (i,j) du maillage.

i ou N se rapporte à x

j ou T se rapporte à t

E.D.P. signifie "équation aux dérivées partielles".

L'approximation de u par v consiste à remplacer dans l'E.D.P. u et ses dérivées partielles par des expressions contenant $v(i,j)$, ΔX, et ΔT, de telle sorte que l'équation algébrique ainsi obtenue permette de calculer $v(i,j)$. En choisissant ΔX et ΔT suffisamment faibles, $v(i,j)$ doit représenter une bonne approximation de $u(i,j)$ en chaque point (i,j).

Les méthodes développées dans le domaine de l'analyse numérique sont nombreuses et désormais classiques. Elles diffèrent selon l'approximation choisie des dérivées partielles ou les points intervenant dans le calcul de $v(i,j)$.

Les approximations des dérivées partielles, habituellement déduites du développement en série de Taylor de $u(x,t)$:

$$u(x+h,t+k) = u(x,t) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(x,t) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1} u(x,t) + \cdots$$

sont de précisions différentes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1,j) - u(i,j)}{\Delta X} + 0(\Delta X)$$

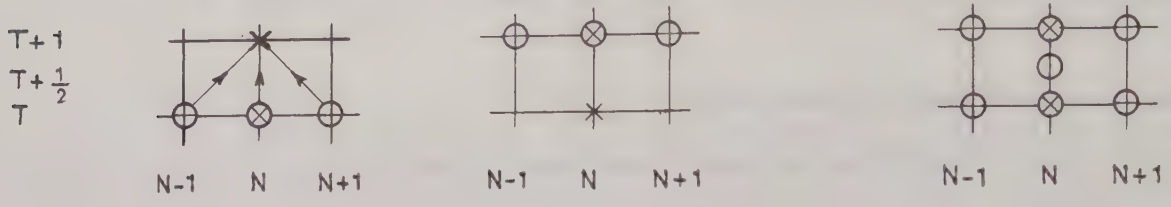
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+1,j) - u(i-1,j)}{2\Delta X} + 0(\Delta X^2)$$

($0(\Delta X^n)$: infiniment petit d'ordre n en ΔX)

etc....

Les schémas de résolution les plus simples sont les schémas explicites (au temps T+1, v_N^{T+1} peut être calculé directement car s'exprime explicitement en fonction de $v(i,j)$ connus) et implicites (nécessitant à chaque temps T la solution d'un système algébrique d'équations couplées).

méthode : explicite à 4 points — implicite à 4 points — à point milieu (Crank-Nicholson à 7 points)



Schémas concernant une même E.D.P. $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

○ point utilisé pour l'approximation de $\frac{\partial}{\partial x}$

× point utilisé pour l'approximation de $\frac{\partial}{\partial t}$

D'autres procédures plus élaborées utilisent des approximations aux points milieux $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i+\frac{1}{2},j) - u(i-\frac{1}{2},j)}{\Delta X}\right)$ ou consistent à itérer, au même instant T, l'approximation d'un même $u(i,j)$, par exemple après correction d'un $v(i,j)$. Ces méthodes sont souvent employées dans les cas d'E.D.P. non linéaires.

Le fait que le système d'équations aux dérivées partielles que nous avons à résoudre ne soit pas linéaire n'est pas fondamentalement gênant ; en effet, la méthode numérique choisie consiste à transformer l'E.D.P. non linéaire en une équation algébrique linéaire vis-à-vis de l'inconnue. Ainsi, un terme tel que $u^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ est, de façon classique, approximé par $v_N^T\, v_N^{T+1}\, \frac{v_N^T - v_N^{T-1}}{\Delta X}$, ce qui introduit linéairement l'inconnue v_N^{T+1}

En contrepartie, il est difficile d'évaluer la précision avec laquelle la solution numérique v approxime la solution réelle u, et très rare de pouvoir justifier rigoureusement le bien fondé du procédé utilisé.

La méthode de résolution aux différences finies n'est adoptée que si elle s'avère convergente, stable, et consistante.

La procédure est convergente si l'erreur de discrétisation w tend vers 0 lorsque ΔX et ΔT tendent simultanément vers 0 :

$$w = u - v \longrightarrow 0 \quad \Delta X \to 0 \quad \Delta T \to 0$$

elle est stable si elle ne peut pas produire l'amplification, au cours du calcul, d'une erreur (conditions initiales ou aux limites, erreur due à la précision du calculateur utilisé, etc...) ; elle est consistante si $v(i,j)$ est bien solution de l'E.D.P. considérée ; en effet, si, par exemple :

$$w = 0\left(\frac{\Delta T}{\Delta X^2}\right)$$

et si

$$\frac{\Delta T}{\Delta X^2} = C^{te}$$

lorsque ΔX et ΔT tendent vers 0, alors w ne tend pas vers 0 lorsque ΔX et ΔT tendent vers 0 et v n'approxime pas u . Une procédure inconditionnellement stable peut ne pas être consistante.

Dans le cas d'E.D.P. linéaires, on démontre que sous réserve de satisfaire un critère de consistance, alors la stabilité est une condition nécessaire et suffisante de convergence.

En général, la condition de stabilité se présente, après calcul du coefficient d'amplification d'erreur ξ sous la forme :

$|\xi| \leq 1$ $\forall$ ΔX par rapport à ΔT (schéma inconditionnellement stable)

$|\xi| \leq 1$ si $\Delta T \leq \lambda \Delta X$ ou $\Delta T \leq \lambda \Delta X^2$ } schémas conditionnellement stables

(ξ est obtenu par substitution de l'expression de la perturbation dans l'E.D.P. - ξ est défini par : $\xi = \frac{\psi(t+\Delta T)}{\psi(t)}$ pour une "perturbation" supposée séparable et développable en série de Fourier (terme général : $\psi(t) e^{j\alpha x}$)-).

Dans la plupart des cas, les schémas sont conditionnellement stables, ce qui signifie que, pratiquement, les pas de calcul en abscisse et temps ne peuvent pas être choisis arbitrairement.

En conclusion, si les méthodes numériques d'approximation de solutions d'E.D.P. sont nombreuses et généralement faciles à mettre en oeuvre, même dans des cas non-linéaires, il est absolument nécessaire de contrôler la qualité de l'approximation qu'elles fournissent, faute de quoi la "solution" numérique peut être totalement erronée.

RESUME

MODELE MATHEMATIQUE DU SYSTEME PULMONAIRE
SIMULATION DU PROCESSUS D'EXPIRATION FORCEE

Cette étude a été centrée sur l'analyse du fonctionnement mécanique du système pulmonaire. Elle a consisté à élaborer un modèle mathématique dont la structure fait apparaître des paramètres significativement liés à la pathologie respiratoire, puis à simuler le processus d'expiration forcée à l'aide des résultats d'expérimentations cliniques.

Méthode générale :

Des hypothèses, imposées à la fois par la complexité du système et par une connaissance encore assez restreinte de celui-ci, ont conduit à un modèle global du système pulmonaire constitué d'un tube élastique de section variable.

L'écoulement gazeux est décrit à l'aide des équations classiques de Navier-Stokes, appliquées au cas d'un mouvement quasi-unidimensionnel et d'un fluide incompressible. Les termes non linéaires et les dérivées partielles par rapport au temps sont pris en compte.

Le mouvement de la paroi du tube est représenté par une équation d'état bronchique, dont la structure est intimement liée à la pathologie respiratoire.

La simulation a consisté à confronter le comportement du modèle et les mesures effectuées sur un patient pendant une expiration forcée.

Le débit buccal, la pression alvéolaire et la pression pleurale sont les conditions aux limites du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires régissant l'écoulement, qui a été résolu par une méthode numérique sur calculateur CII 10 070.

...

Résultats et conclusion :

Le modèle s'est révélé valable pour une classe d'entrées bien plus large que celle des modèles du système pulmonaire fournis par la littérature.

Il permet en particulier d'aborder l'analyse des phénomènes de dynamique de variation élevée , comme ceux mis en jeu au cours d'une expiration forcée. Il met aussi en évidence la différence des comportements des parois bronchiques en régimes statique et dynamique, et permet de proposer une formulation originale de l'équation d'état de ces parois.

En conclusion , un modèle mathématique du système pulmonaire a été établi en assimilant la respiration à l'écoulement unidimensionnel d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique de section variable. D'un point de vue qualitatif, ce modèle est satisfaisant.

La structure de ce modèle se prête bien à une exploitation quantitative ultérieure à l'aide, par exemple, de méthodes d'identification de processus. Cependant, il est à prévoir que les contraintes de précision apportées par ces dernières nécessiteront le développement de nouveaux moyens d'investigation du système pulmonaire.

BIBLIOGRAPHIE

1 - A. ANGOT
Compléments de Mathématiques
Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T, 1965.

2 - E.O. ATTINGER & Co.
Advances in Biomedical engineering and Medical Physics - Volume 1 -
Summer N. Levine ed. Interscience Publishers, New-York, 1968.

3 - P.S. BARNA
Fluid mechanics for engineers - 3rd edition -.
Butterworths, 1969.

4 - B. CARNAHAN - H.A. LUTHER - J.O. WILKES
Applied numerical methods
Wiley & Sons, 1969.

5 - C. CHIGNOLI - R. RABAGLIATI
A two-dimensional model for the Lagoon of Venice
Lecture notes in computer Science, 5th conference on optimization techniques, part II, G. Gros ed.

6 - G. DEMOMENT
Application de la méthode du modèle a l'étude d'un système biologique complexe : le ventricule gauche
Automatisme, tome XIX, n° 12, décembre 1974.

7 - G. DEMOMENT
Modèle de la boucle circulatoire : évaluation de l'autorégulation mécanique et de la fonction ventriculaire gauche
Thèse 1972, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay.

8 - B.N. FEINBERG - E.H. CHESTER & J.D. SCHOEFFLER
Parameter estimation : A diagnostic Aid for Lung Diseases
Instrumentation Technology, 40-46, July 1970.

9 - D.R. FERGUSON - R.J. MILLS - F. MORAN - D.J. MURRAY-SMITH - A.I. PACK
Estimation of the parameters of a lung model with clinical applications
Identification and System parameter Estimation, part 1, Pb 5, 213-220, P. Eykhoff ed.

10 - J.F. GOLDEN - J.W. CLARK Jr, P.M. STEVENS
Mathematical modeling of pulmonary airway dynamics
IEEE Transactions on biomedical engineering, vol. BM.E.20, n° 6, November 1973.

11 - I. GRANET
Fluid mechanics for engineering technology
Prentice - Hall , 1971.

12 - J.W. IRELAND
Mechanics of fluids
Butterworths 1971.

13 - A.C. JACKSON & H.T. MILHORN
Digital computer simulation of respiratory mechanics
Computers and Biomedical Research, 6, 27-56, (1973).

14 - S.L.S. JACOBY - J.S. KOWALIK - J.T. PIZZO
Iterative methods for nonlinear optimization problems
Prentice-Hall, 1972.

15 - V.K. JAIN & S.K. GUHA
A control system for long-term ventilation of the lungs
IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-19, n° 1, January 1972.

16 - E.A. JOHN, W. HABERMAN
Introduction to fluid mechanics
Prentice, Hall, 1971.

17 - L.V. KANTOROVICH & V.I. KRYLOV
Approximate methods of higher analysis
Interscience Publischers, New-York, 1964.

18 - J.L. LIONS
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires
Dunod, 1969.

19 - Méthodes de calcul scientifique et technique
Colloque IRIA, Springer-Verlag, décembre 1973.

20 - J.M. ORTEGA - W.C. RHEINBOLDT
Iterative solution of non linear equations in several variables
Computer science and applied mathem.

21 - C. PAIN - G. ATLAN
Modèle mathématique du système pulmonaire : simulation numérique de la pression alvéolaire
Automatisme, à paraitre en Mars 1975

22 - R. PEYRET & H. VIVIAND
Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour les fluides compressibles
Colloque International sur les méthodes de calcul scientifique et Technique IRIA, décembre 1973.

23 - Y. QUENEC'HDU & D. VIAULT
Systèmes asservis non linéaires
Cours E.S.E. 1974

24 - J.K. RAINES - M.Y. JAFFRIN - A.H. SHAPIRO
A computer simulation of arterial dynamics in the human leg.
Thesis , Massachusetts Institute of Technology, February 1973.

25 - J. RICHALET - A. RAULT - R. POULIQUEN
Identification des processus par la méthode du modèle
Gordon & Breach, Théorie des systèmes, volume 4, 1971.

26 - R.D. RICHTMYER & K.W. MORTON
Difference methods for initial value problems
Interscience, Tracts in math, n° 4.

27 - R.L. ROCKWELL - M. ANLIKER - J. ELSNER
Model studies of the pressure and flow pulses in a viscoelastic arterial conduit
Annals of biomedical engineering, Vol. 297, N° 5, May 1974.

28 - G. SANSONE & R. CONTI
Non linear differential equations
Pergamon Press.

29 - Survey of numerical analysis
John Todd ed.
Mc. Graw-Hill book Company, Inc. 1972.

30 - S.P. SUTERA
Mécanique des écoulements physiologiques
Université de Paris VI, 1973.

31 - Y. TANGUY
Identification
Cours E.S.E., 1972.

32 - R. TEMAM
Analyse numérique
P.U.F., collection sup. 1970.

33 - P.A. THOMPSON
Compressible-fluid dynamics
Mc. Graw-Hill, 1972.

34 - R. VICHNEVESTSKY
Physical criteria in computer methods for partial differential equations
Annales de l'Association internationale pour le calcul Scientifique, n° 1 Janvier 1974, 3-16.

35 - D.J. WILDE
Méthodes de recherche d'un optimum
Dunod ed. 1966.

BIBLIOGRAPHIE CONCERNANT LE SYSTEME PULMONAIRE

36 - H. BACHOFEN & J. HILDEBRANDT
Area analysis of pressure-volume hysteresis in mammalian lungs
J. Appl. Physiol -, 30(4) , 493-497, 1971.

37 - J. CLEMENT
Pressure-Flow-Volume relationships during expiration
Ed. Acco, Tiensestraat 134-136, 3000 Leuven, Thèse 1973.

38 - J. CLEMENT & J. PARDAENS
Mécanique broncho-pulmonaire chez l'homme sain et les pulmonaires chroniques
1 vol. Masson & Cie, 1971 (table ronde Nancy).

39 - J. CLEMENT - J. PARDAENS - K.P.VAN DE WOESTIJNE.
Expiratory flow rates, driving pressure and time - dependant factors - Simulation by means of a model.
Resp. Physiol, 20, 353-369, 1974.

40 - A.B. DUBOIS
Resistance to breathing
Handbook of physiology, Respiration 1, chap. 16.

41 - D.L. FRY
Theoretical considerations of the Bronchial Pressure-Flow-Volume Relationships with Particular Reference to the maximum expiratory Flow-Volume curve.
Physiol. Med. Biol, 3 , 174-194, 1958.

42 - D.L. FRY - MD & R.E. HYATT - MD
Pulmonary mechanics
Amer, J. Med, 29 , 672-689,1960.

43 - P. GAYRARD & J.M. MOURLOT
Effets de l'inflation pulmonaire sur le calibre bronchique - Etude bronchographique chez le sujet normal et dans la bronchique chronique
Bull. Physio-path. resp., 7, 561-584, 1971.

44 - M. GREEN - J. MEAD - J.M. TURNER
Variability of maximum expiratory flow-volume curves
J. Appl. Physiol, 37(1) , 67-74, 1974.

45 - K. HORSFIELD & G. CUMMING
Morphology of the bronchial tree in man
J. Appl. Physiol, 24(3) , 373-383, 1968.

46 - J.M.B. HUGHES - H.A. JONES - A.G. WILSON - B.J.B. GRANT - N.B. PRIDE
Stability of intrapulmonary brionchial dimensions during expiratory flow in excised lungs
J. Appl. Physiol, 37(5) , 684-694, 1974.

47 - R.E. HYATT & R.E. FLATH
Influence of lung parenchyma on pressure-diameter behavior of dog bronchi
J. Appl. Physiol., 21(5) , 1448-1452, 1966.

48 - R.E. HYATT - D.P. SCHILDER - D.L. FRY
Relationship between maximum expiratory flow and degree of lung inflation
J. Appl. Physiol., 13 , 331-336, 1958.

49 - R.E. HYATT & R.E. WILCOX
Extrathoracic airway resistance in man
J. Appl. Physiol., 16(2) , 326-330, 1961.

50 - M.J. JAEGER & H. MATTHYS
The pattern of flow in the upper human airways
Respiration Physiology, 6, 113-127, 1968/1969.

51 - R.J. KNUDSON - J. MEAD - D.E. KNUDSON
Contribution of Airway collapse to supramaximal expiratory flow
J. Appl. Physiol., 6(6) , 653-667, 1974.

52 - C.B. Mc. CALL - R.E. HYATT - F.W. NOBLE - D.L. FRY
Harmonic content of certain respiratory flow phenomena of normal individuals
J. Appl. Physiol., 10(2) , 215-218, 1957.

53 - P.T. MACKLEM & N.J. WILSON
Measurement of intrabronchial pressure in man
J. Appl. Physiol., 20(4) , 653-663, 1965.

54 - H.B. MARTIN & D.F. PROCTOR
Pressure volume measurements on dog bronchi
J. Appl. Physiol., 13(3) , 337-343, 1958.

55 - J. MEAD - J.M. TURNER - P.T. MACKLEM - J.B. LITTLE
Significance of the relationship between lung recoil and maximum expiratory flow
J. Appl. Physiol., 22(1) , 95-108, 1967.

56 - C.R. OLSEN - A.E. STEVENS - M.B. Mc. ILROY
Rigidity of tracheae and bronchi during muscular constriction
J. Appl. Physiol., 23(1) , 27-34, 1967.

57 - C.R. OLSEN - A.E. STEVENS - N.B. PRIDE - N.C. STAUB
Structural basis for decreased compressibility of constricted tracheae and bronchi
J. Appl. Physiol., 23(1) , 35-39, 1967.

58 - T.J. PEDLEY - R.C. SCHROTER - M.F. SUDLOW
Energy losses and pressure drop in models of human airways
Respiration physiology, 9, 371-386, 1970.

59 - T.J. PEDLEY - R.C. SCHROTER - M.F. SUDLOW
The prediction of pressure drop and variation of resistance within the human bronchial airways
Respiration Physiology, 9, 387-405, 1970.

60 - R. PESLIN - J. MORINET-LAMBERT - C. DUVIVIER
Frequency response of pneumotachographs
Bull. Physio-Path resp., 8, 1363-1376, 1972.

61 - T. SUGIHARA - C.J. MARTIN - J. HILDEBRANDT
Length tension properties of alveolar wall in man
J. Appl. Physiol., 30(6) , 874-878, 1971.

62 - E.R. WEIBEL
Morphometrics of the lung
Handbook of physiology - Respiration 1 - Chap. 7.

- – - – - – -

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données

Vu et approuvé :

Orsay, le 20 JUIN 1975

Le Vice-Président du Centre d'Orsay :

J Hamburger